



## **DOCUMENTO METODOLÓGICO:**

# **ANÁLISIS DE SERIES CRONOLÓGICAS, APLICADAS A SERIES ECONÓMICAS**

Lima, mayo 2011

Dirección y Supervisión General:

**Econ. Saúl García Mendoza**

*Director Técnico del Centro de Investigación y Desarrollo*

Investigadora:

**Fátima Medina Merino**

Las opiniones y conclusiones de esta investigación son de exclusiva responsabilidad del autor, por lo que el INEI no se solidariza necesariamente con ellas.

---

Preparado	:	Centro de Investigación y Desarrollo del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI)
Impreso	:	Talleres de la Oficina Técnica de Administración del INEI
Diagramación	:	Centro de Edición de la Oficina Técnica de Difusión del INEI
Tiraje	:	100 Ejemplares
Domicilio	:	Av. General Garzón 658, Jesús María. Lima - Perú
Orden de Impresión	:	xxxxx-OI-OTA-INEI

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°: 2011-08474

# ÍNDICE

## ÍNDICE

Advertencia .....	5
INTRODUCCIÓN .....	7
Capítulo I Conceptos Básicos .....	9
1.1 Conceptos Básicos .....	11
1.2 Tratamiento Preliminar de la Serie .....	15
1.3 Análisis Exploratorio de Datos .....	18
1.3.1 Identificación de Tendencia y Ciclos .....	37
1.3.2 Identificación de Estacionalidad .....	40
1.3.3 Exploración Gráfica del Tipo de Modelo .....	41
1.3.4 Exploración de la Estacionariedad .....	42
Capítulo II Modelización Mediante el Enfoque de Descomposición .....	45
2.1 Estimación de la Serie por Promedios Móviles .....	47
2.2 Estimación de la Serie por Modelos de Suavización .....	50
2.2.1 Suavización Exponencial Simple .....	50
2.2.2 Suavización Exponencial Biparamétrico de Holt .....	54
2.2.3 Suavización Exponencial Biparamétrico de Holt & Winters .....	58
2.3 Estimación de la Serie por Modelos de Descomposición .....	62
2.3.1 Estimación de la Estacionalidad .....	66
2.3.2 Estimación de la Tendencia .....	70
2.4 Estimación de la Tendencia por Curvas de Crecimiento y Crecimiento Limitado .....	74
2.5 Comprobación de la Eficacia de la Estimación .....	77
2.6 Aplicación de Modelización a Series Económicas .....	79
Capítulo III Modelización Mediante el Enfoque de Dominio del Tiempo ...	99
3.1 Proceso Lineal General .....	101
3.1.1 Estimación de la Función de Autocovarianza y Autocorrelación .....	102
3.1.2 Procesos Autoregresivos AR(p) .....	105
3.1.3 Procesos de Media Móvil MA(q) .....	108
3.1.4 Procesos Autoregresivos de Media Móvil ARMA(p,q) .....	111
3.1.5 Procesos No Estacionarios ARIMA (p,d,q) .....	113
3.1.6 Procesos Estacionales SARIMA .....	114
3.2 Identificación .....	115
3.3 Estimación del Modelo .....	121
3.3.1 Estimación Preliminar .....	121
3.3.2 Estimación por Método de Máxima Verosimilitud .....	122
3.3.3 Estimación por Método de Aproximación Mínimo Cuadrática .....	123
3.4 Validación de los Modelos .....	125
3.5 Análisis Espectral .....	129
3.6 Aplicaciones del Enfoque de Dominio de Tiempo y Dominio de Frecuencias a Series Económicas .....	131
Anexo .....	153
Bases de Datos .....	164
Referencia Bibliográfica .....	181



## **ADVERTENCIA**

Este libro no debe ser leído por teóricos puros, que no creen en la estadística como herramienta de desarrollo para otras áreas.



*Centro de Investigación y Desarrollo*



## INTRODUCCIÓN

---

Dentro del espectro económico nacional existen indicadores cuyo análisis y estimación en el tiempo tienen importantes aplicaciones para la comprensión de las coyunturas actuales y previsión de escenarios futuros. Así, resultan de mucho interés el Índice de Precios al Consumidor y las componentes que integran la canasta familiar, los indicadores de Producción y los indicadores Sectoriales (Agricultura, Pesca, Minería, Manufactura, etc).

La construcción de estos indicadores, como el IPC, implica la combinación de muchas variables, cada una de las cuales tiene sus propias características y su propio comportamiento estadístico. En tal sentido, la estimación por Series de Tiempo usando indicadores resulta siempre una tarea difícil, más aún cuando el proceso estocástico en el tiempo que los genera tiene una estructura que integra otros procesos. De ahí que muchos esfuerzos realizados por alcanzar buenos pronósticos, en estos casos, no sean consistentes y deban ser frecuentemente reformulados.

Este trabajo está dirigido a profesionales no necesariamente estadísticos que necesitan analizar y pronosticar series de tiempo económicas usando métodos estadísticos. Su contenido se basa en las notas de clase desarrolladas en el curso de Series de Tiempo dictado en la UNMSM durante 20 años y que han sido desarrolladas tomando como fuentes los textos clásicos de autores como: Box & Jenkins, Morettin y Uriel. Nuestra intención es poner al alcance del lector la rigurosidad de conceptos estadísticos con explicaciones sencillas, obviando demostraciones y buscando la aplicación sin pasar por alto, donde se requiera, los supuestos a considerar. El texto hace un amplio

uso de los programas PASW (SPSS vs 18), Minitab vs 16, EViews vs 7.0 para ilustrar la aplicación de cada método, presentando la guía que facilita su aplicación.

En el primer capítulo, se inicia con una introducción a las series de tiempo, en la cual presentamos los conceptos, herramientas fundamentales y esquemas que tratan de ubicar al interesado según la aplicación que realizará; en este capítulo también se desarrollan las técnicas de tratamiento preliminar de series de tiempo, las cuales son una aplicación del análisis exploratorio de datos, toda vez que un requisito fundamental para una buena modelización es tener información depurada y un buen conocimiento del comportamiento de la serie.

En el segundo capítulo, se desarrolla el enfoque de descomposición, en el cual se realizan las estimaciones de los componentes de la serie: Tendencia, Ciclos, Estacionalidad y Aleatoriedad. Adicionalmente se presentan los métodos de suavización exponencial y suavización de Holt & Winters para pronosticar la serie de manera integral. También se desarrollan los modelos para curvas de crecimiento y crecimiento limitado. El capítulo finaliza con una sección de comprobación de la eficacia de la estimación y los pronósticos de las series que mejor se ajustan a estos modelos.

En el tercer capítulo, se presenta el enfoque de dominio del tiempo con apoyo del dominio de frecuencias (espectros). Finaliza con una sección de aplicación de estos métodos a series económicas. Se incluye un anexo de las modelizaciones de las series que fueron consideradas para las aplicaciones ARIMA.

En la parte final del documento, se muestran las bases de datos de todas las series.



*Centro de Investigación y Desarrollo*



# **CAPÍTULO I**

## **Conceptos Básicos**



*Centro de Investigación y Desarrollo*



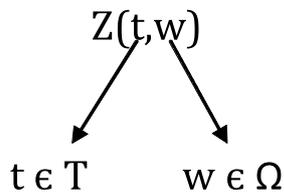
### 1.1 Conceptos Básicos

*¿De dónde surgen las series de tiempo?  
¿Qué las caracteriza? ¿Cuál es el objetivo en el Análisis de Series de Tiempo? ¿Cuáles son las principales herramientas de las Series de Tiempo?*

Toda serie de tiempo proviene de un "proceso estocástico" que lo genera. Formalmente hablando, diremos que:

*"Un proceso estocástico es la familia de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ".*

Siendo  $T$  el conjunto de  $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ .  
Como  $\forall t \in T, Z(t)$  es una v. a. definida  $\Omega$ .  $Z(t)$  es una función de dos argumentos



Para cada  $w \in \Omega$  se obtiene una función de  $t$ , es decir, una realización del proceso.

*Una serie de tiempo es una realización de un proceso, en forma secuencial y en intervalos regulares en el tiempo, que tiene un inicio ( $t_0$ ) y un fin ( $t_n$ ).*

Ejemplos:

1. Series Económicas:
  - a. Venta mensual de pollo en Lima Metropolitana. Enero 1990 -Diciembre 2009.
  - b. Volumen de Exportaciones Manufactureras. Perú. Enero 1990 - Diciembre 2009.

2. Series Demográficas:
  - a. Población Anual. Perú. 1970-2009.
  - b. Total de Nacimientos mensuales. Lima Metropolitana. Enero 2000-Mayo 2008.
3. Series Físicas:
  - a. Precipitaciones pluviométricas diarias. Cusco. Noviembre 2005 - Diciembre 2005.
  - b. Temperatura promedio mensual. La Libertad. Julio 2008 - Julio 2010.

**Tema de Discusión:**

*El Índice de Precios al Consumidor (IPC), está definido como un Indicador Estadístico que muestra las variaciones promedio de los precios de los bienes y servicios consumidos habitualmente por el conjunto de familias de diversos niveles de ingreso, en una determinada área geográfica; mide únicamente la Evolución de Precios. Según esta definición, ¿puede ser considerada como una serie de tiempo? ¿Cuál es el proceso que la genera?*

**Características de un Proceso Estocástico en t:**

**Gaussiano:** Las variables aleatorias que conforman el proceso estocástico  $Z_t$ , provienen de una distribución normal.

**Estacionario:** El término está asociado con el concepto de "estabilidad" en el tiempo. Sin embargo, se conocen dos formas de estacionariedad:

- *Estacionariedad en sentido débil (o en sentido amplio):* La esperanza y la varianza del proceso se mantienen constantes con relación al tiempo.

$$E(Z_t) = k \qquad V(Z_t) = \sigma^2$$

- **Estacionariedad en sentido estricto:** La distribución de probabilidad del proceso es invariante para cualquier momento en el tiempo. Por lo tanto, la esperanza y la varianza también son invariantes.

$$f_x(x_1; \dots; x_n; t_1; \dots; t_n) = f_x(x_1; \dots; x_n; t_1 + c; \dots; t_n + c)$$

**No Markoviano:** La ocurrencia en el momento "t" se relaciona por la ocurrencia en "t-k". Es decir, existe asociación entre el momento actual y el pasado del proceso.

### **ENFOQUES PARA EL ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO:**

En un análisis de Series de Tiempo, como en cualquier análisis datos, lo que se procura es obtener un modelo estadístico que describa el fenómeno de manera parsimoniosa (económica en término de los parámetros). Existen tres enfoques para el tratamiento de las series de tiempo, que de acuerdo con el objetivo y a las características de la serie pueden ser aplicados:

**Enfoque de Descomposición.-** Es también considerado el enfoque "tradicional". Utiliza los modelos de error y de descomposición.

Los modelos de error representan el comportamiento de las series de tiempo en base a una parte "sistemática" y una parte "aleatoria" (denominada error). En la práctica, se trata de estimar los parámetros de un polinomio (de grado k) o de una curva de crecimiento o crecimiento limitado (exponencial, exponencial modificada, gompertz, logística). Para pronosticar se evalúa la función que representa la parte sistemática en t+k, donde k es el paso adelante en el tiempo.

Una mejora a los modelos de error, son los modelos de suavización exponencial, con los cuales también se basan en la forma polinómica de la serie pero con parámetros no fijos, sino que se van actualizando en el tiempo.

Los modelos de descomposición propiamente, suponen que en general una serie de tiempo está constituida por cuatro componentes que son: Tendencia ( $T_t$ ), Ciclos ( $C_t$ ), Estacionalidad ( $E_t$ ) y Aleatoriedad ( $A_t$ ) o también conocido como componente irregular. Las dos primeras son consideradas, componentes a largo plazo; mientras que las últimas se denominan, componentes a corto plazo.

Toda vez que una serie forma parte de un proceso, la no observación de una de los componentes no debe ser considerada como que "no existe", simplemente debe asumirse que en forma determinística no es observada, pero que "probabilísticamente" puede estar presente.

El tratamiento por los modelos de descomposición, empieza por la identificación de la forma y características de cada componente, lo cual se puede hacer de manera inicial mediante la observación del gráfico de las series originales, pasando luego a estimar de manera individual cada una de ellas, para lo cual se elimina momentáneamente la componente estimada. Posteriormente, las estimaciones de los componentes pasan por un proceso de integración para obtener la estimación de la serie.

Para integrar los componentes es necesario determinar previamente el tipo de modelo de la serie. Los modelos pueden ser:

Aditivo :  $Z_t = T_t + C_t + E_t + A_t$

Multiplicativo :  $Z_t = T_t * C_t * E_t * A_t$

Mixto :  $Z_t = T_t * C_t * E_t + A_t$

Es conveniente recalcar que no necesariamente todas las componentes deben estar presentes en el modelo en forma determinística.

**Enfoque de Dominio del Tiempo.**- Se basa en la asociación de cada valor de la serie con su propio pasado inmediato más una variable puramente aleatoria denominada "ruido blanco". Son los llamados modelos ARIMA o modelos de Box & Jenkins.

Estos modelos se originan a partir del estudio de los procesos que los generan, que pueden ser:

Procesos de Media Móvil (MA(q) )

$$Z_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Autorregresivos: AR (p)

$$Z_t = \delta + \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \dots + \varphi_p Z_{t-p} + a_t$$

Autorregresivos de Media Móvil: ARMA (p, q)

$$Z_t = \delta + \varphi_1 Z_{t-1} + \varphi_2 Z_{t-2} + \dots + \varphi_p Z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

A partir de estos modelos se originan los ARIMA, SARIMA, ARCH, GARCH, VAR, etc.

El periodograma de Schuster se construye a partir de la descomposición armónica de la serie en senos y cosenos de diferentes frecuencias y amplitudes, obteniendo:

$$I(\omega) = (a(\omega))^2 + (b(\omega))^2$$

Donde.

$$a(\omega) = \frac{1}{n} \sum Y_t \sin(\omega t)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{n} \sum Y_t \cos(\omega t)$$

con  $\omega$  = frecuencia angular  $\omega \in (-\pi, \pi)$ .

Schuster supuso que un proceso es una suma de armónicas en diferentes frecuencias y amplitudes, de tal manera que si pudiéramos determinar qué frecuencias son las más importantes en un proceso, podríamos caracterizar lo más sustancial de éste. Para ello Schuster creó una herramienta conocida como el Periodograma mediante la cual se descompone una serie en todas las posibles frecuencias y se le asocia una intensidad a cada una de ellas. El investigador, puede descubrir de esa forma cuáles son las intensidades más altas y así determinar a qué frecuencias corresponde.

La evolución del trabajo de Schuster, nos lleva al análisis de la función espectral, cuya herramienta es el espectro que sigue tomando como base el

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left( \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(j\omega) \right)$$

Es decir, el espectro es la transformada de Fourier de la función de autocovarianza. Esto hace ver la estrecha relación que existe entre el enfoque del dominio de frecuencias y el enfoque del dominio del tiempo (modelos ARIMA) en el cual la función  $\gamma_k$  desempeña un papel muy importante tanto para la identificación como en la modelización. Finalmente, el espectro será usado también en la fase de validación del modelo a través del análisis del espectro residual.

**CUADRO N° 1.1**  
**Herramientas Previas para el Análisis**

Objetivo	Herramienta	Comentario
<b>Descripción General de la Serie</b>	Gráfico de Secuencia/ Estadísticas Descriptivas	<p>La revisión de la serie completa, dato por dato, así como la inspección del gráfico de secuencias permitirá descartar o explicar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Datos faltantes.</li> <li>- Falta de regularidad en la secuencia de registros.</li> <li>- Posibles errores en la digitación.</li> </ul> <p>Es importante distinguir entre el valor "0" por naturaleza de la serie, del valor "0" por ausencia de registro. Igualmente la irregularidad en la secuencia de registros puede ser accidental, como consecuencia de una falta de registros, o natural como en el caso de series provenientes de semanas laborales. Recuerde que es el investigador, quien toma la decisión respecto al periodo de observación. Por ende, en el momento inicial del trabajo se debe decidir si es necesario excluir del análisis aquellos periodos en los cuales la serie presentó un comportamiento "aparentemente" proveniente de otro proceso, luego de lo cual experimenta un cambio drástico y se convierte en el proceso actual.<sup>1</sup></p>
<b>Identificación del Tipo de Modelo</b>	Gráfico de Dispersión vs. Nivel + Gráfico de Serie Original	<p>Se ha dicho en párrafos anteriores que la serie puede pertenecer a un modelo aditivo, multiplicativo o mixto. El gráfico de dispersión vs. nivel permite "confirmar" si la serie puede ser modelada como un multiplicativo. En los modelos multiplicativos, el gráfico de dispersión vs. nivel presenta asociación entre estas dos componentes captadas por el ln[mediana (nivel) ] y ln[dispersión intercuartil (dispersión) ]. Recuerde que este gráfico no es determinante, sino que confirma la sospecha de modelo multiplicativo o mixto que usted puede intuir a partir de la visualización de la gráfica de la serie original.</p>
<b>Identificación de Tendencia y Datos Atípicos</b>	Gráfico de Cajas Simples + Gráfico de Periodograma + Gráfico de Secuencia	<p>La identificación del tipo de tendencia puede realizarse por simple inspección del gráfico de la serie original, cuando la presencia de otras componentes no impide su visualización. De lo contrario, se puede hacer uso del gráfico de cajas simples, en el cual cada caja representa una agrupación de unidades menores en el tiempo. De esta forma si la serie es de:</p> <p>Registro mensual , cada caja representa 1 año (12 meses)                      Registro semanal, cada caja representa 1 mes (4 semanas)                      Registro diario, cada caja representa 1 semana (5/7 días)                      Registro diario, cada caja representa 1 mes (30 días)</p> <p>La disposición general de las cajas nos sugerirá un tipo de tendencia, que puede ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Polinómica: Lineal, cuadrática, cúbica (polinomios de mayor orden están vinculados con la presencia de ciclos)</li> <li>- Curva de crecimiento: Exponencial</li> <li>- Curva de crecimiento limitado: Exponencial modificada, logística, Gompertz.</li> </ul> <p>El periodograma es una herramienta que también permite detectar la presencia de tendencia creciente, ya que se manifiesta con una alta intensidad en la frecuencia "0".</p>
<b>Identificación de Estacionalidad</b>	Gráfico de Cajas Agregadas + Gráfico de Periodograma + Gráfico de Series Superpuestas + Gráfico de Secuencias	<p>La estacionalidad es una componente que presenta un patrón periódico a corto plazo. Para la identificación de la estacionalidad se sugiere iniciar con el gráfico de cajas agregadas, en el cual si la serie es de:</p> <p>Registro mensual, cada caja representa 1 mes de todos los años.                      Registro semanal, cada caja representa 1 día de la semana                      Registro diario, cada caja representa 1 día</p> <p>La disposición general de las cajas nos debe sugerir el patrón estacional de la serie. Sin embargo, una herramienta bastante mejor para determinar la presencia de estacionalidad así como el periodo de la estacionalidad, es el periodograma, en el cual las intensidades más altas corresponden a frecuencias características, cuyo valor inverso corresponde a los periodos de interés en la parte estacional.</p> <p>El gráfico de series superpuestas es un recurso más modesto para detectar estacionalidad, es de utilidad cuando con anticipación se conoce el posible orden de la estacionalidad (S) y simplemente se quiere verificar su presencia. Cada gráfica superpuesta equivale a partir la serie según <math>K_S</math>, donde <math>K=1,2,\dots</math> y graficarla una sobre otra en simultáneo. Si efectivamente hay estacionalidad en realidad se verá un sólo patrón en todas las gráficas.</p>

Continúa.

<sup>1</sup> Para los interesados en este tema, se les recomienda ver el capítulo 12. Análisis de Intervención del libro *Análisis de las Series Temporales* de Pedro A. Morettin

**Conclusión.**

<p><b>Identificación de Ciclo</b></p>	<p>Gráfico de Periodograma</p>	<p>Al hablar del ciclo, estamos tratando de una componente a largo plazo con una periodicidad <math>S &gt; 12</math> (en el caso de registros mensuales). No tiene sentido hablar de ciclos en series cuyas periodicidades son menores a 1 año. Para detectar la presencia de ciclos, debemos contar con una cantidad suficiente de años (mínimo 11 años) a fin de observar su patrón de repetición. Para la detección de ciclos se sugiere el uso del periodograma en el que, de forma similar a la estacionalidad, la intensidad máxima corresponde a la frecuencia característica, cuya inversa equivale al período del ciclo.</p>
<p><b>Diagnóstico Preliminar de la Estacionariedad</b></p>	<p>Gráfico de la Serie Original + Gráfico de Dispersión vs. Nivel + Gráfico del Correlograma.</p>	<p>La estacionariedad es la característica de "estabilidad" de la serie, que no debe ser confundida con la estacionalidad. La inspección general de la serie por medio del gráfico de la serie original nos da una idea de la estacionariedad en nivel y en variabilidad si podemos observar que el comportamiento de la serie no presenta cambios en su tendencia o en su variabilidad. Sin embargo una vez que se sospecha que la serie no es estacionaria en variabilidad, podemos confirmar esta sospecha mediante el gráfico de dispersión vs. nivel.</p> <p>Para su elaboración se agrupa la serie por años (series mensuales) o meses (series diarias), etc.</p> <p>Se grafica la pareja de puntos formados por LnDC (logaritmo de la dispersión intercuartílica del <math>i</math>-ésimo año) y LnME (logaritmo de la mediana del <math>i</math>-ésimo año). Si los puntos aparecen como una nube dispersa, se confirma que la serie es estacionaria. Si los puntos sugieren una pendiente lineal, se confirma la no estacionariedad en variabilidad, en cuyo caso se podrá buscar una transformación no lineal que estabilice la serie. Si de la inspección de la serie original se observa que la serie no estacionaria en nivel. Podemos proceder a observar el gráfico de las autocorrelaciones simples de la serie (correlograma). En este la no estacionariedad se manifiesta como:</p> <p>Autocorrelaciones que decrecen muy lentamente. Autocorrelaciones muy altas (cercasas o por encima de -1 o 1) Autocorrelaciones que crecen en lugar de decrecer.</p> <p>En algunos casos la estabilidad de la serie por nivel, es posible conseguirlo aplicando diferencias finitas a la serie. En cualquier caso la aplicación de transformaciones o de diferencias finitas debe realizarse en forma parsimoniosa (menor cantidad posible de parámetros y de tratamiento a la serie original). En el caso en que una serie presente problemas de estacionariedad tanto por variabilidad como por nivel, primero se tratará el problema de variabilidad, por transformaciones no lineales y luego el problema de nivel por diferencias finitas.</p>

**Terminología:**

Variable observada  $Z_t$  puede ser:

- Continua            - Unidimensional
- Discreta            - Multidimensional

Variable "tiempo (t)" puede ser:

- Continua            - Unidimensional
- Discreta            - Multidimensional

Objetivos del Análisis de Series de Tiempo



**1.2 Tratamiento Preliminar de la Serie**

El tratamiento preliminar de la serie se basa en una inspección inicial cuyo objetivo es verificar la calidad de los datos con los que se va a trabajar.

En tal sentido, el investigador deberá cerciorarse:

- Que no tengamos errores de digitación: Se debe poner especial atención a los datos sospechosamente grandes o sospechosamente pequeños, consultando con la fuente original de registro y tratando de encontrar una explicación documentada de lo que originó ese dato. Frecuentemente, los errores de digitación son la principal fuente de datos outliers o atípicos.
- Verificación de la validez de la información: Debemos asegurarnos de la validez de la información verificando la fuente de procedencia, el periodo, unidad de la variable de interés y ubicación geográfica de referencia. Además es

muy importante decidir la unidad de registro en el tiempo que se usará para trabajar. Esta decisión debe ser tomada de acuerdo con el objetivo que se persigue.

■ Resolver el problema de datos faltantes si es que lo hubiera: No hay que confundir un registro que por naturaleza es "0" porque en ese momento en el tiempo la variable no presentó movimiento, del "0" por "omisión" en el registro, pérdida del dato o en la digitación, lo cual equivale a un error humano. En este último caso, se debe proceder a recuperar la información correspondiente

recurriendo primero a las fuentes. De no ser posible recuperar el dato, recién se procede a "estimar" el dato faltante por técnica de prorrato, la cual frecuentemente es el promedio de los datos vecinos o de los meses correspondientes (si la serie es estacional).

■ En caso de trabajar con series monetarias es preferible expresarlas en valores constantes mediante el uso de un deflactor adecuado, el cual frecuentemente es el IPC.

$$Y_{\text{deflactor}} = (Y_t / IPC_t) * 100$$

### PLANTILLA Nº 1 Gráficos de las series en estudio

Gráfico Nº 1.1  
PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1991 - 2009  
(Miles de toneladas métricas)

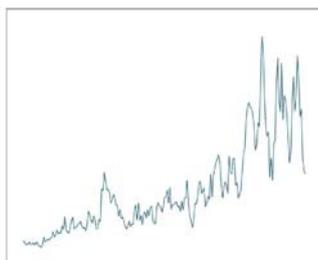


Gráfico Nº 1.2  
PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992 - 2009  
(Miles de toneladas métricas)

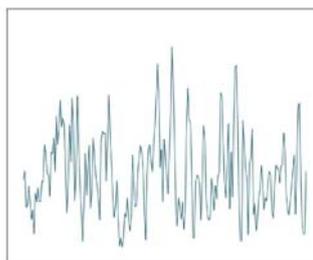


Gráfico Nº 1.3  
LIMA METROPOLITANA: IPC, 1994 - 2009  
(Año Base 2009=100,0)

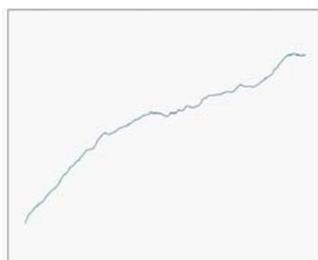


Gráfico Nº 1.4  
PERÚ: VOLUMEN DE PRODUCCIÓN DE AGUA, 1993 - 2009  
(Milímetros cúbicos)

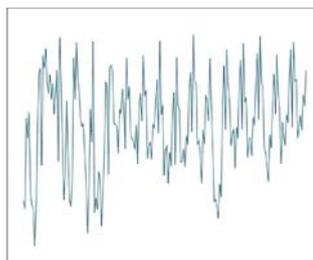


Gráfico Nº 1.5  
PERÚ: PBI, 1991 - 2009  
(Año Base 1994=100,0)

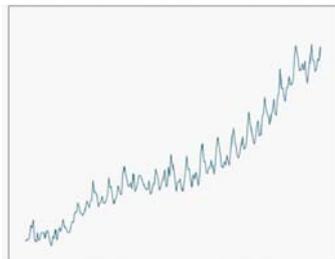
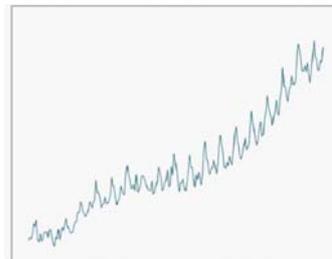
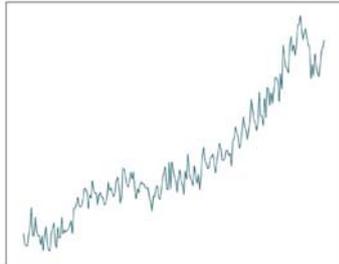


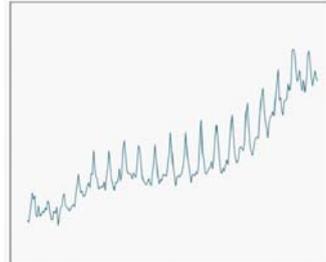
Gráfico Nº 1.6  
PERÚ: PBI - TOTAL INDUSTRIAS, 1991 - 2009  
(Año Base 1994= 100,0)



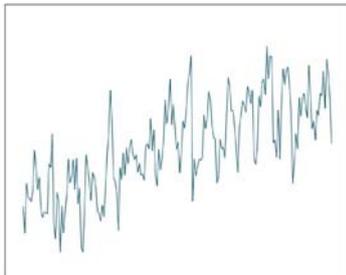
**Gráfico N° 1.7**  
**PERÚ: PBI - MANUFACTURERA, 1991 - 2009**  
(Año Base 1994 = 100,0)



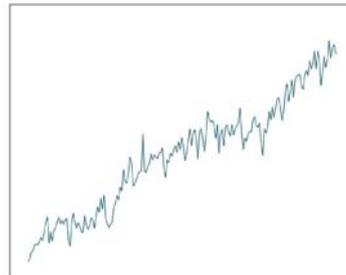
**Gráfico N° 1.8**  
**PERÚ: PBI - COMERCIO, 1991 - 2009**  
(Año Base 1994 = 100,0)



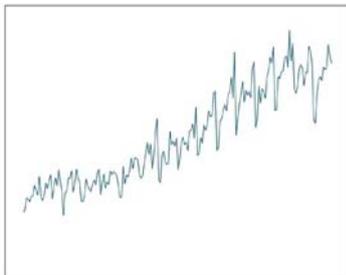
**Gráfico N° 1.9**  
**PERÚ: VOL. VENTA - HARINA DE TRIGO, 1991 - 2009**  
(Miles de toneladas métricas)



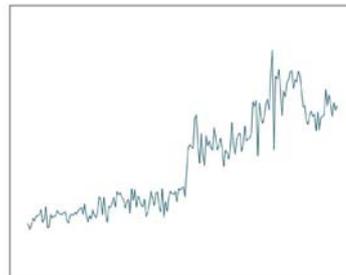
**Gráfico N° 1.10**  
**PERÚ: VOL. VENTA - ALIMENTOS BALANCEADOS - AVES, 1991 - 2009**  
(Miles de toneladas métricas)



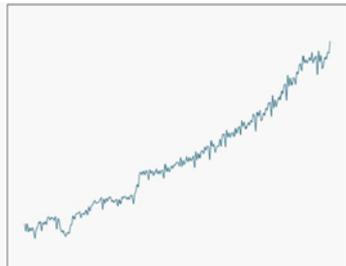
**Gráfico N° 1.11**  
**PERÚ: VOL. VENTA - LECHE EVAPORADA, 1991 - 2009**  
(Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.12**  
**PERÚ: VOL. VENTA DE ACEITE VEGETAL, 1991 - 2009**  
(Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.13**  
**PERÚ: VOL. PROD. ELÉCTRICA, 1991 - 2009**  
(Giga wattios - hora)



Fuente: INEI

### 1.3 Análisis Exploratorio de Datos

El análisis exploratorio de la serie tiene por finalidad describir el comportamiento de la serie resaltando sus características más importantes.

Las características más importantes a observar son:

- " Tendencia
- " Estacionalidad
- " Tipo de Modelo
- " Ciclos
- " Estacionariedad por Variabilidad
- " Estacionariedad por Nivel
- " Presencia de Outliers o Datos Atípicos

A continuación, detallaremos las herramientas del análisis exploratorio que nos permitirá describir las características mencionadas y el modo de uso con el programa PASW (SPSSv18).

#### a. Construcción de cajas simples y agregadas

**Las cajas simples** se construyen agrupando los datos por años y ordenándolos en forma ascendente, (o descendente), dentro de cada agrupación anual. De esta manera, cada caja resume el comportamiento de un año. Más adelante veremos que este tipo de gráfico, es muy aplicado para identificar el tipo de tendencia de la serie.

**Las cajas agregadas** se construyen agrupando los datos por meses (si se trata de series de registro mensual) y se procede a ordenar los datos en forma ascendente (o descendente) dentro de cada grupo (mes). Cada caja resume el comportamiento de un mes, de este modo, el gráfico muestra de manera comparativa las 12 cajas representando a los 12 meses del año.

Estos gráficos de cajas simples y agregadas pueden ser adaptados al caso de series horarias, diarias, semanales, trimestrales, etc.

Los elementos que en general intervienen para la construcción de las cajas son de tipo estadísticas de orden: Medianas (Me), Cuartil inferior (CI), Cuartil superior (CS), Paso, Dispersión intercuartilica (DC), cohorte inferior, cohorte superior, limite inferior, limite superior.

#### **Ejemplo:**

1. Mostrar el procedimiento de construcción del Gráfico de Cajas Simples usando la serie mensual IPC.

#### **Solución:**

- A.- Como la serie es mensual y uno de los objetivos del gráfico de cajas simples es visualizar el tipo de tendencia de la serie, se eligen como agrupación "los años"
- B.- Ordenamos en forma ascendente los datos dentro de cada grupo (año)

**CUADRO N° 1.2**  
**LIMA METROPOLITANA: SERIE MENSUAL DEL IPC, 1990 - 2010**  
**(Año Base: 2009=100,0)**

	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Enero	0,151	10,647	22,382	35,523	48,126	54,730	60,851	67,544	72,214	75,875	78,746	81,783	81,102	82,983	85,273	87,858	89,528	90,103	93,841	99,966	100,401
Febrero	0,198	11,651	23,443	36,565	49,002	55,352	61,785	67,604	73,106	76,114	79,124	81,984	81,070	83,342	86,199	87,652	90,017	90,337	94,692	99,891	100,725
Marzo	0,282	12,548	25,188	38,114	50,141	56,112	62,637	68,466	74,070	76,580	79,552	82,400	81,507	84,274	86,596	88,221	90,429	90,652	95,679	100,251	101,008
Abril	0,360	13,280	25,987	39,802	50,915	56,664	63,183	68,731	74,522	77,031	79,959	82,057	82,101	84,231	86,576	88,326	90,890	90,814	95,826	100,270	101,033
Mayo	0,478	14,295	26,881	41,009	51,280	57,137	63,643	69,250	74,965	77,394	79,973	82,077	82,215	84,204	86,883	88,438	90,410	91,260	96,180	100,227	101,274
Junio	0,681	15,619	27,845	41,754	51,865	57,589	63,939	70,002	75,362	77,533	80,024	82,030	82,028	83,805	87,373	88,671	90,290	91,689	96,921	99,866	101,528
Julio	1,112	17,033	28,813	42,898	52,326	57,928	64,818	70,582	75,836	77,737	80,437	82,171	82,056	83,680	87,541	88,764	90,136	92,125	97,459	100,073	101,897
Agosto	5,528	18,266	29,628	43,985	53,128	58,529	65,417	70,742	76,036	77,870	80,814	81,923	82,139	83,692	87,533	88,604	90,262	92,251	98,034	99,865	102,171
Septiembre	6,290	19,282	30,404	44,697	53,402	58,758	65,629	70,949	75,627	78,229	81,263	81,974	82,528	84,159	87,548	88,521	90,287	92,816	98,591	99,778	102,138
Octubre	6,894	20,044	31,510	45,372	53,555	59,057	66,111	71,057	75,374	78,134	81,452	82,005	83,121	84,200	87,527	88,649	90,326	93,108	99,195	99,900	101,993
Noviembre	7,303	20,838	32,625	46,099	54,209	59,791	66,420	71,112	75,397	78,351	81,504	81,600	82,789	84,342	87,778	88,709	90,071	93,211	99,502	99,789	
Diciembre	9,036	21,617	33,881	47,257	54,527	60,105	67,221	71,565	75,864	78,691	81,630	81,526	82,762	84,817	87,770	89,081	90,095	93,633	99,860	100,105	

Fuente: INEI

C.- Obtenemos las estadísticas de orden por cada año:

**CUADRO N° 1.3**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTADIGRAFOS DEL IPC POR AÑO, 1990 - 2010**  
**(Año Base: 2009=100,0)**

Estadigrafos	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Me (mediana)	0,897	16,326	28,329	42,326	52,096	57,763	64,378	70,292	75,368	77,635	80,231	81,994	82,120	84,180	87,450	88,563	90,274	91,907	97,190	99,933	101,401
Gi (cuartil inf)	0,335	13,097	25,788	39,380	50,722	56,526	63,047	68,665	74,409	76,918	79,857	81,888	81,868	83,689	86,591	88,300	90,069	90,773	95,789	99,881	101,014
Cs (cuartil sup)	6,441	19,473	30,680	44,866	53,440	58,833	65,749	70,576	75,679	78,158	81,310	82,062	82,586	84,241	87,543	88,681	90,347	92,889	98,742	100,135	101,969
Dc (disp. Inter)	6,105	6,375	4,893	5,488	2,719	2,307	2,703	2,311	1,270	1,239	1,453	0,174	0,689	0,553	0,952	0,381	0,258	2,116	2,952	0,254	0,955
Paso	9,158	9,563	7,339	8,229	4,078	3,460	4,054	3,467	1,905	1,859	2,179	0,262	1,033	0,829	1,428	0,571	0,388	3,174	4,428	0,382	1,433
Chi (cohort inf)	-8,822	3,534	18,449	31,151	46,644	53,066	58,993	65,197	72,504	75,060	77,678	81,626	80,865	82,860	85,164	87,729	89,701	87,599	91,361	99,499	99,581
Chs (cohort su)	15,599	29,035	38,019	53,095	57,518	62,293	69,803	74,443	77,584	80,017	83,490	82,323	83,619	85,071	88,970	89,252	90,735	96,063	103,170	100,517	103,402
Li (límite inf)	0,151	10,647	22,382	35,523	48,126	54,730	60,851	67,544	72,214	75,875	78,746	81,526	81,070	82,983	85,273	87,652	89,526	90,103	93,841	99,778	100,401
Ls (límite sup)	9,036	21,617	33,881	47,257	54,527	60,105	67,221	71,565	75,864	78,691	81,630	82,400	83,121	84,817	87,778	89,081	90,860	93,633	99,860	100,270	102,171

Fuente: INEI

Para la obtención de los estadígrafos se usa:

Estadígrafos	
MEDIANA = Me = $[X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}]/2$	(1.1)
CUARTIL INFERIOR = CI = $[X_{(n/4)} + X_{(n/4+1)}]/2$	(1.2)
CUARTIL SUPERIOR = CS = $[X_{(3n/4)} + X_{(3n/4+1)}]/2$	(1.3)
DISPERSION INTERCUARTILICA # <sub>i</sub> NOMBRE?	(1.4)
PASO = P = 1.5 *DC	(1.5)
COHORTE INFERIOR # <sub>i</sub> NOMBRE?	(1.6)
COHORTE SUPERIOR # <sub>i</sub> NOMBRE?	(1.7)
LIMITE INFERIOR = LI = Si $(X_{\min} \geq CHI)$	(1.8)
LIMITE SUPERIOR = LS = Si $(X_{\max} \leq CHS)$	(1.9)

\* Sea n = Número total de Datos de la Serie

Si el mínimo valor de la serie (o el máximo) no cumple con la desigualdad (1.8), este se considera como un punto discordante, y se descarta como límite inferior, de la misma manera para el siguiente valor, hasta obtener el dato que sí cumpla con la desigualdad. (Análogamente para el límite superior).

Para obtener estos resultados en el PASW, procedemos de la siguiente manera:

- i. Seleccione el menú *Datos* y la opción *Segmentar archivo*.
- ii. Aparecerá una ventana en donde optará por:

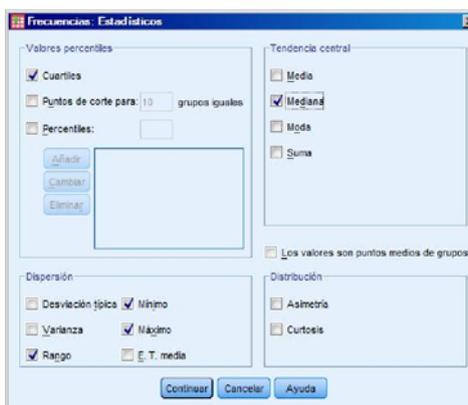


- iii. Aceptar

- iv. Para la obtención de los estadísticos descriptivos, elija el menú *Analizar* y la opción *Frecuencias*, aparecerá una ventana en la cual realizará lo siguiente:



- v. Presione en el botón *Estadísticos* y seleccione lo siguiente:



- vi. Escoja Continuar y Aceptar. Obteniendo como resultado:

**CUADRO N° 1.4**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTADÍGRAFOS DEL IPC, SEGÚN AÑO EN EL PASW, 1990 - 2009**  
**(Año Base: 2009=100,0)**

Año	Mediana	Rango	Mínimo	Máximo	Percentiles	
					25	75
1990	,90	8,88	,15	9,04	,29	6,74
1991	16,33	10,97	10,65	21,62	12,73	19,85
1992	28,33	11,50	22,38	33,88	25,39	31,23
1993	42,33	11,73	35,52	47,26	38,54	45,20
1994	52,10	6,40	48,13	54,53	50,33	53,52
1995	57,76	5,37	54,73	60,10	56,25	58,98
1996	64,38	6,37	60,85	67,22	62,77	65,99
1997	70,29	4,02	67,54	71,57	68,53	71,03
1998	75,37	3,82	72,21	76,04	74,18	75,78
1999	77,64	2,82	75,87	78,69	76,69	78,20
2000	80,23	2,88	78,75	81,63	79,65	81,40
2001	81,99	,87	81,53	82,40	81,82	82,07
2002	82,12	2,05	81,07	83,12	81,64	82,70
2003	84,18	1,86	82,95	84,82	83,68	84,26
2004	87,45	2,50	85,27	87,78	86,58	87,55
2005	88,56	1,43	87,65	89,08	88,25	88,70
2006	90,27	1,36	89,53	90,89	90,08	90,39
2007	91,91	3,53	90,10	93,63	90,69	93,03
2008	97,19	6,02	93,84	99,86	95,72	99,04
2009	99,93	,49	99,78	100,27	99,87	100,20

Fuente: INEI

vii. Para el diagrama de cajas, seleccione el menú Gráficos, Cuadros de diálogo antiguos, Diagrama de Cajas. Escoja la opción simple y definir.



## Plantilla N° 2 Gráficos de Cajas Simple para Series en Estudio

Gráfico N° 1.14  
PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009  
(Miles de toneladas métricas)

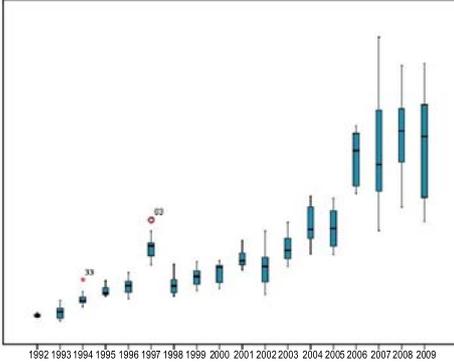


Gráfico N° 1.15  
PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009  
(Miles de toneladas métricas)

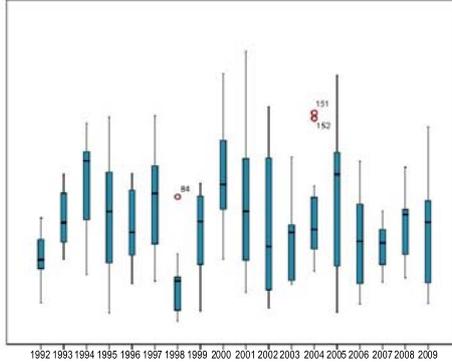


Gráfico N° 1.16  
LIMA METROPOLITANA: IPC, 1994-2009  
(Año Base 2009=100,0)

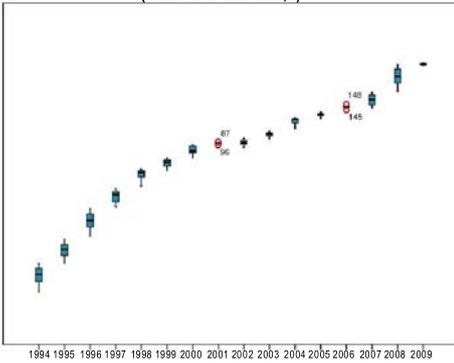


Gráfico N° 1.17  
PERÚ: VOLUMEN DE PRODUCCIÓN DE AGUA, 1993-2009  
(Milímetros cúbicos)

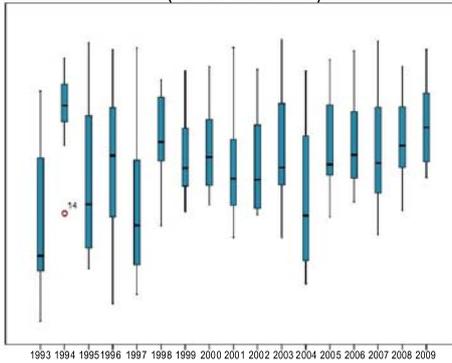


Gráfico N° 1.18  
PERÚ: PBI, 1991-2009  
(Año Base 1994=100,0)

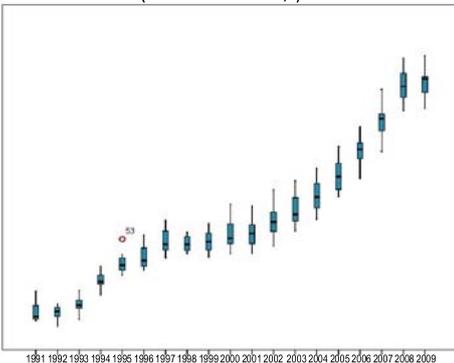
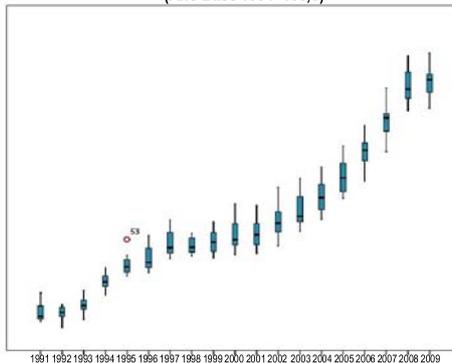
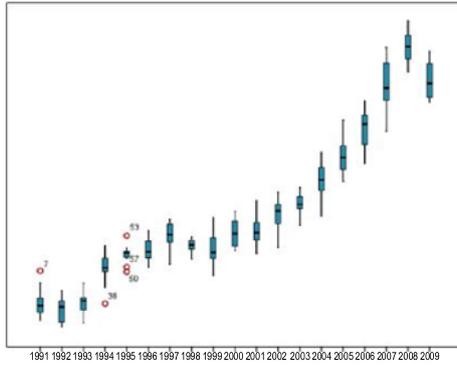


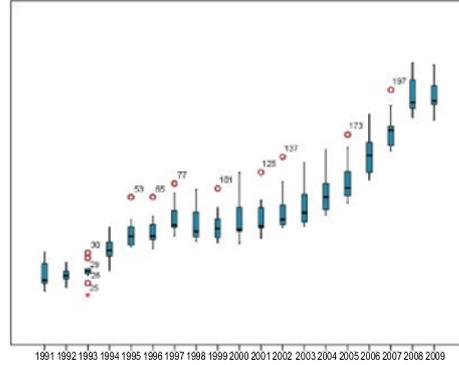
Gráfico N° 1.19  
PERÚ: PBI-TOTAL INDUSTRIAS, 1991-2009  
(Año Base 1994=100,0)



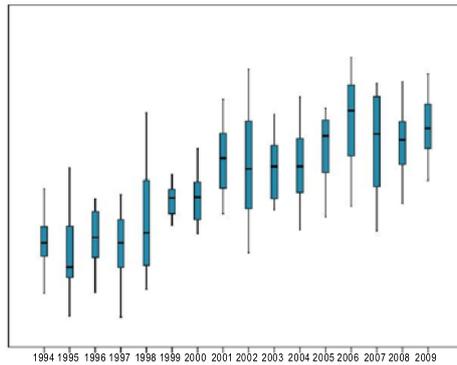
**Gráfico N° 1.20**  
**PERÚ: PBI-MANUFACTURA, 1991-2009**  
 (Año Base 1994=100,0)



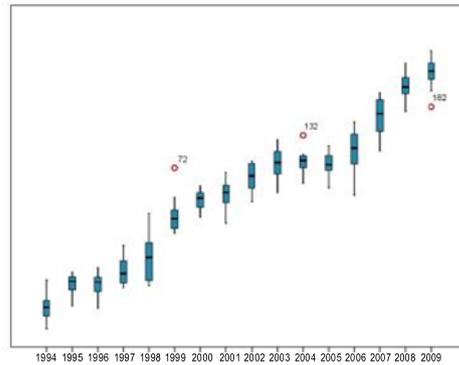
**Gráfico N° 1.21**  
**PERÚ: PBI - COMERCIO, 1991-2009**  
 (Año Base 1994=100,0)



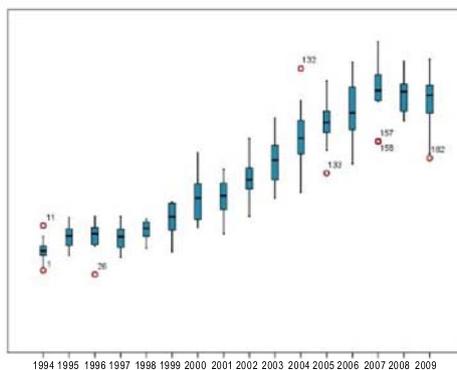
**Gráfico N° 1.22**  
**PERÚ: VOL. VENTA - HARINA DE TRIGO, 1994-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



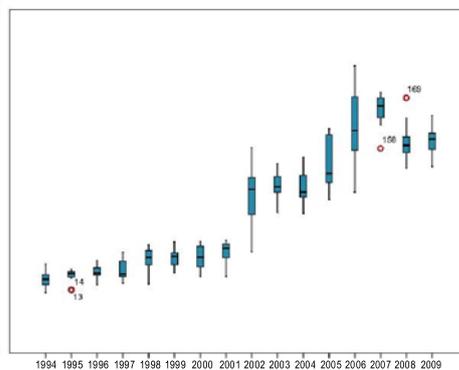
**Gráfico N° 1.23**  
**PERÚ: VOL. VENTA-ALIMENTOS BALANCEADOS-AVES, 1994-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



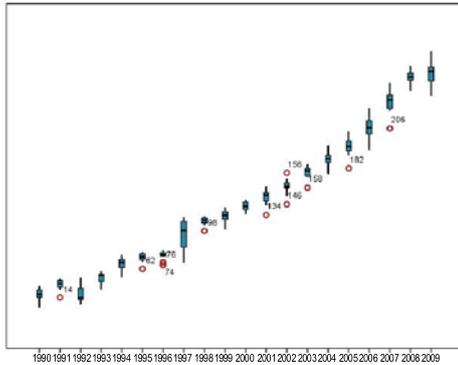
**Gráfico N° 1.24**  
**PERÚ: VOL. VENTA LECHE EVAPORADA, 1994-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.25**  
**PERÚ: VOL. VENTA DE ACEITE VEGETAL, 1994-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.26**  
**PERÚ: VOL. PROD. ELÉCTRICA, 1990-2009**  
 (Giga wattios-hora)



Fuente: INEI

**Ejemplo:**

2. **Mostrar el procedimiento para la construcción del gráfico de cajas agregadas con la serie mensual IPC.**

**Solución**

En el gráfico de cajas agregadas de una serie mensual, cada caja representa 1 mes. De esta manera, se tendrán 12 cajas una junto a la otra, cuya disposición trata de mostrar el patrón estacional de la serie (si lo hubiera). El siguiente cuadro muestra los estadígrafos por cada mes.

**Cuadro N° 1.5**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTADÍGRAFOS DEL IPC POR MES, 1990 - 2010**  
 (Año Base: 2009=100,0)

Estadígrafos	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Me (mediana)	78.746	79.124	79.552	79.959	79.973	80.024	80.437	80.814	81.263	81.452	79.927	80.109
Ci (cuartil inf)	54.730	55.352	56.112	56.664	57.137	57.599	57.928	58.529	58.758	59.057	58.396	58.710
Cs (cuartil sup)	87.858	87.652	88.221	88.326	88.438	88.671	88.764	88.604	88.521	88.649	88.011	88.098
Dc (disp. Inter)	33.127	32.299	32.110	31.662	31.301	31.072	30.836	30.076	29.763	29.592	29.615	29.387
Paso	49.691	48.449	48.165	47.493	46.951	46.608	46.254	45.114	44.645	44.388	44.423	44.081
Chi (cohort inf)	5.039	6.903	7.947	9.171	10.186	10.991	11.673	13.415	14.113	14.669	13.973	14.629
Chs (cohort su)	137.549	136.100	136.386	135.819	135.389	135.279	135.018	133.718	133.165	133.037	132.434	132.179
Li (límite inf)	0.151	0.198	0.262	0.360	0.478	0.681	1.112	5.528	6.290	6.894	7.303	9.036
Ls (límite sup)	100.401	100.725	101.008	101.033	101.274	101.528	101.897	102.171	102.138	101.993	99.789	100.105

Fuente: INEI

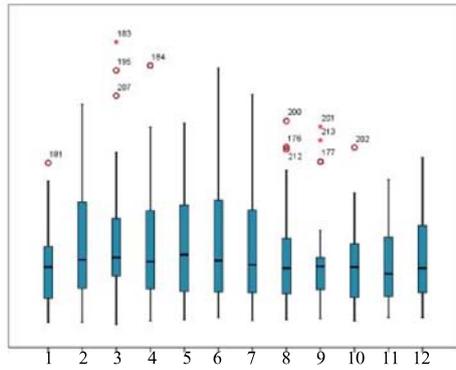
A continuación, mostramos el procedimiento con el programa PASW para realizar el gráfico de cajas. Usaremos en las etiquetas la serie de tiempo IPC.

- i. Para el diagrama de cajas, seleccione el menú Gráficos, Cuadros de diálogo antiguos, Diagrama de Cajas. Escoja la opción simple y definir. En el eje de categorías especificar:

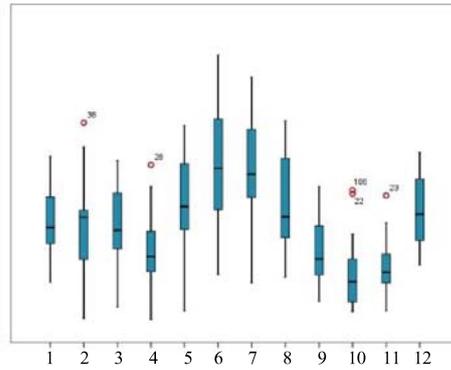


**Plantilla N° 3 Gráficos de Cajas Simple para series en estudio**

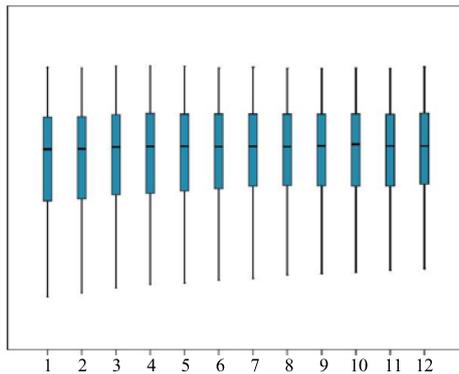
**Gráfico N° 1.27**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



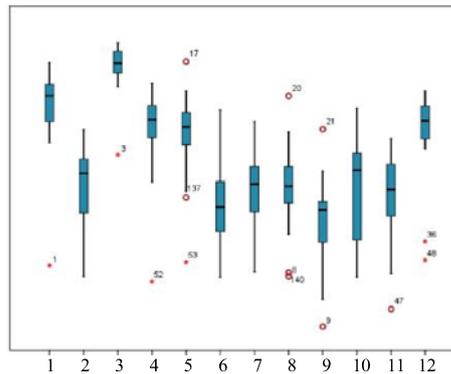
**Gráfico N° 1.28**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



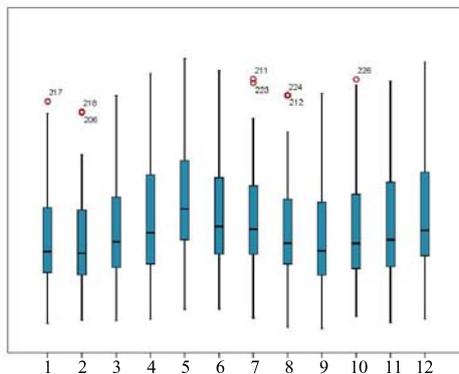
**Gráfico N° 1.29**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



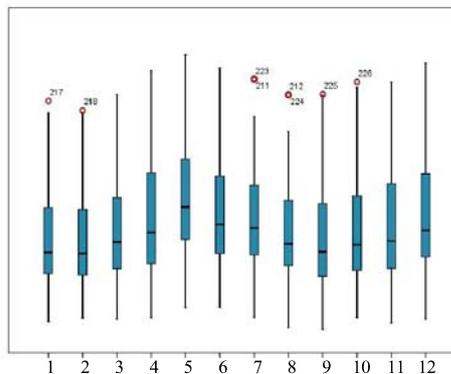
**Gráfico N° 1.30**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



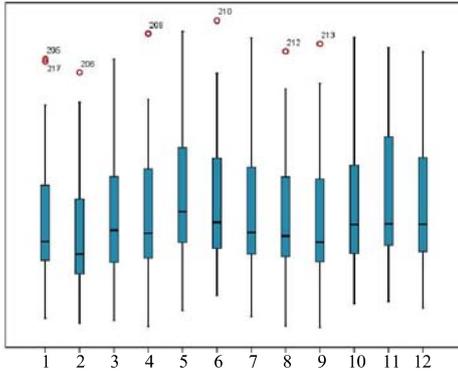
**Gráfico N° 1.31**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



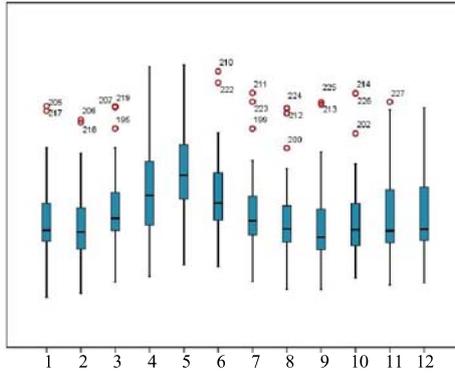
**Gráfico N° 1.32**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



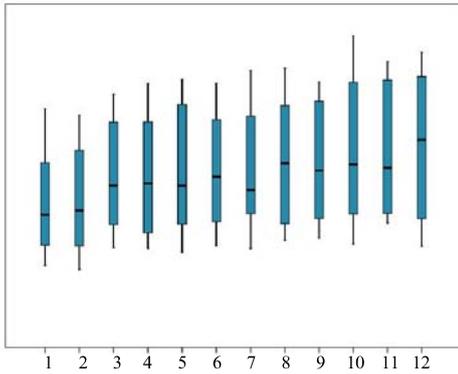
**Gráfico N° 1.33**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



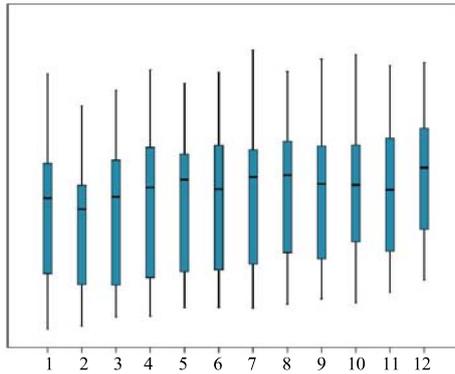
**Gráfico N° 1.34**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



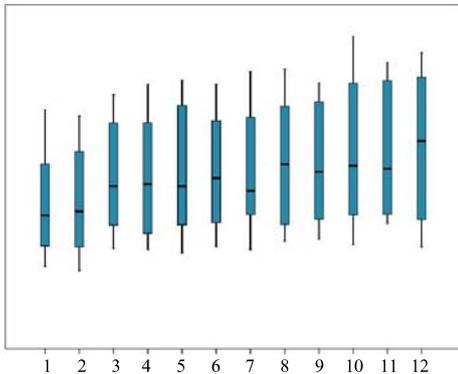
**Gráfico N° 1.35**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



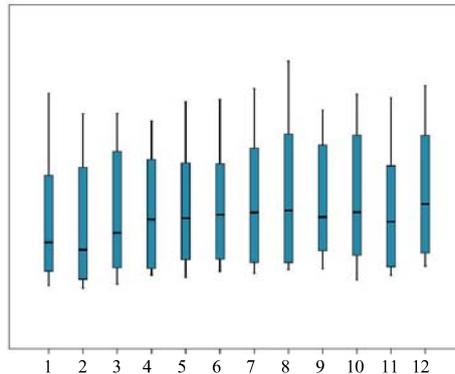
**Gráfico N° 1.36**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



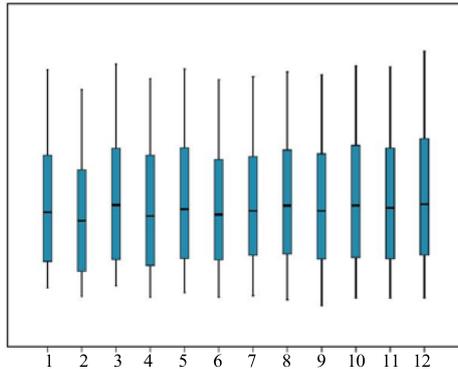
**Gráfico N° 1.37**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.38**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.39**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



Fuente: INEI

**b. Construcción del Gráfico Dispersión vs. Nivel**

El gráfico dispersión vs. nivel basa su construcción en la asociación de las estadísticas que resumen la dispersión de los datos (dispersión intercuartílica) y el nivel de posición central de los datos (mediana).

Para determinar dicha asociación, se sitúan los pares ordenados de los logaritmos de mediana y dispersión intercuartílica de cada año en un eje cartesiano y se busca trazar la recta mínimo cuadrática que asocie a estos puntos. De esta forma, se puede determinar el valor de la pendiente de esta recta (p).

Para modelos de tipo Multiplicativo, el valor de la pendiente (p) es próximo a cero. Sin embargo, es

importante anotar que el resultado de este gráfico simplemente constituye una ayuda exploratoria que permite confirmar la sospecha de modelo multiplicativo o aditivo y que no debe ser considerado como una prueba concluyente para determinar el tipo de modelo.

**Ejemplo:**

**3. Mostrar el procedimiento para construir el Gráfico de Dispersión vs. Nivel usando los datos de la serie mensual IPC.**

**Solución:**

a. Ordenamos los datos en forma creciente dentro de cada año, como se hizo en el Cuadro N° 1

b.- Obtenemos la información necesaria para llenar el cuadro siguiente:

**Cuadro N° 1.6**  
**LIMA METROPOLITANA: NIVEL Y DISPERSIÓN DEL IPC POR AÑO, 1994 - 2010**  
 (Año Base: 2009=100,0)

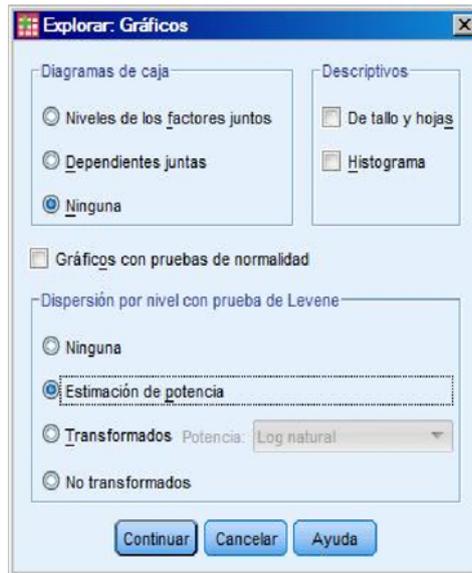
Estad.	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
ME	52,10	57,76	64,38	70,29	75,37	77,64	80,23	81,99	82,12	84,18	87,45	88,56	90,27	91,91	97,19	99,93	101,40
DC	2,72	2,31	2,70	2,31	1,27	1,24	1,45	0,17	0,69	0,55	0,95	0,38	0,26	2,12	2,95	0,25	0,96
Ln(ME)	3,95	4,06	4,16	4,25	4,32	4,35	4,38	4,41	4,41	4,43	4,47	4,48	4,50	4,52	4,58	4,60	4,62
Ln(DC)	1,00	0,84	0,99	0,84	0,24	0,21	0,37	-1,75	-0,37	-0,59	-0,05	-0,97	-1,35	0,75	1,08	-1,37	-0,05

Fuente: Inei

Se grafican los pares ordenados [Ln(me), Ln(dc)] en el eje de coordenadas cartesianas y se procede a observar la pendiente mínimo cuadrática que más se aproxime a esos puntos. Veamos ahora el procedimiento que en el programa PASW se sigue para construir el gráfico de dispersión vs. Nivel usando la serie IPC.

- ii. Escoja "Visualización" Gráficos, y se desplegará la ventana: Explorar Gráficos. En Diagrama de caja, indique "ninguna", desactive el "descriptivo" y marque "estimación de potencia" en Dispersión por nivel con prueba de Levene.

- i. Para el gráfico de nivel dispersión vs. nivel, seleccione el menú *Analizar* y la opción *Explorar*. Especifique el nombre de la variable (IPC) en la Lista de dependientes y el nombre de la columna de agrupación (año) en la Lista de factores.

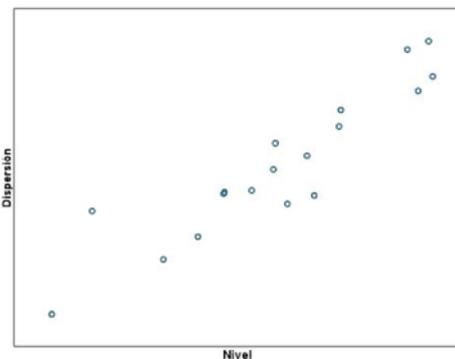


De esta manera obtendrá el gráfico del logaritmo de la mediana versus el logaritmo de la dispersión intercuartil, cuya forma podrá confirmar la sospecha de un modelo de tipo multiplicativo.

En la parte inferior del gráfico aparece la pendiente mínimo cuadrática más próxima para el ajuste de una recta a los puntos presentados en el gráfico.

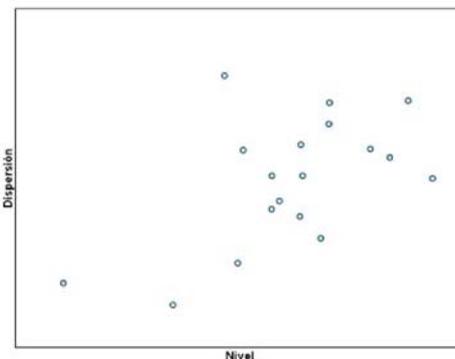
#### Plantilla N° 4 Gráficos de Cajas Simple para series en estudio

Gráfico N° 1.40  
PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009  
(Miles de toneladas métricas)



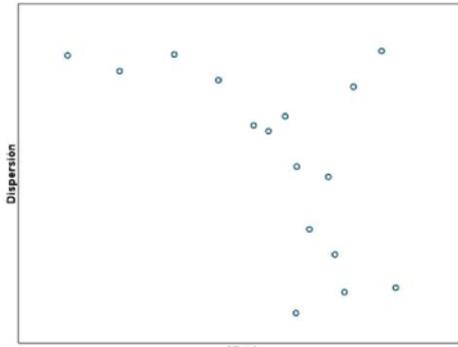
Inclinación = 1.077 Potencia para transformación = -.077

Gráfico N° 1.41  
PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009  
(Miles de toneladas métricas)



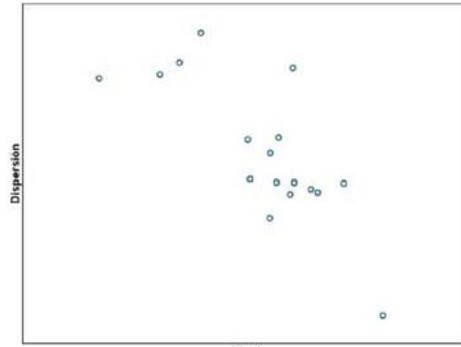
Inclinación = .768 Potencia para transformación = .232

Gráfico N° 1.42  
LIMAMETROPOLITANA: IPC, 1994-2009  
(Año Base 2009=100,0)



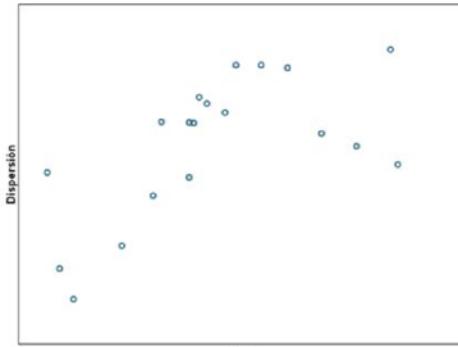
Inclinación = 2.764 Potencia para transformación = 3.764

Gráfico N° 1.43  
PERÚ: VOLUMEN DE PRODUCCIÓN DE AGUA, 1993-2009  
(Milímetros cúbicos)



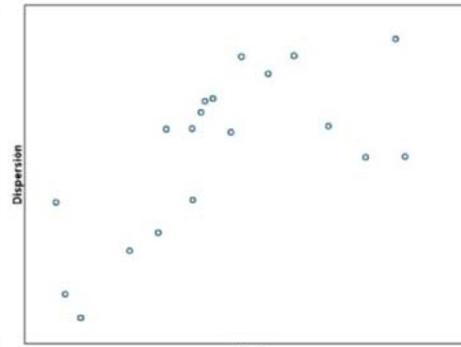
Inclinación = -7.213 Potencia para transformación = 8.213

Gráfico N° 1.44  
PERÚ: PBI, 1991-2009  
(Año Base 1994=100,0)



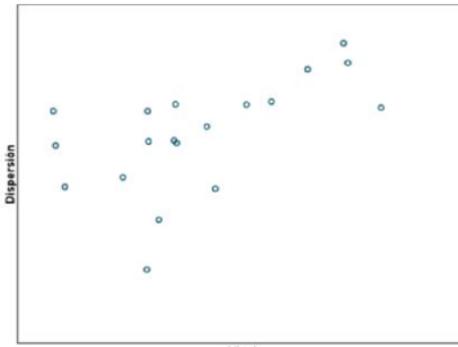
Inclinación = .831 Potencia para transformación = .169

Gráfico N° 1.45  
PERÚ: PBI-TOTAL INDUSTRIAS, 1991-2009  
(Año Base 1994=100,0)



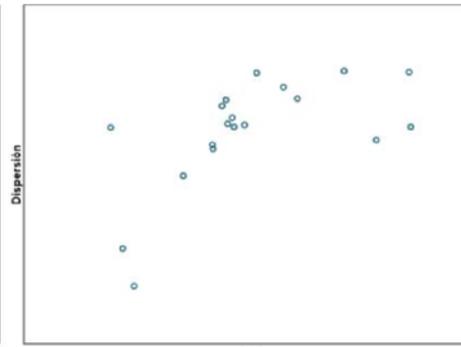
Inclinación = .846 Potencia para transformación = .154

Gráfico N° 1.46  
PERÚ: PBI-MANUFACTURERA, 1991-2009  
(Año Base 1994=100,0)



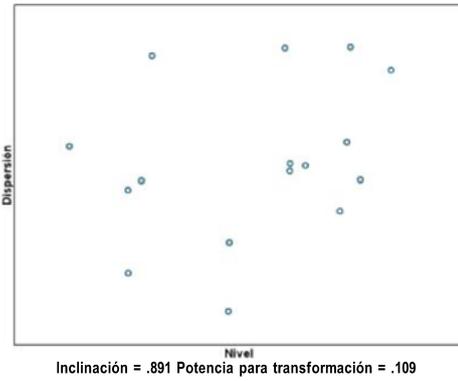
Inclinación = 1.089 Potencia para transformación = -.089

Gráfico N° 1.47  
PERÚ: PBI - COMERCIO, 1991-2009  
(Año Base 1994=100,0)

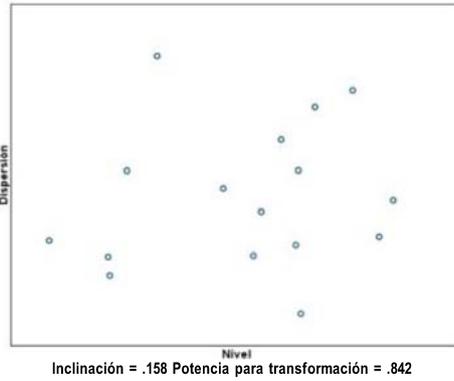


Inclinación = 1.053 Potencia para transformación = -.053

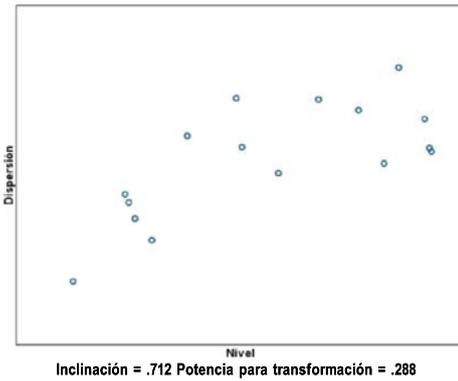
**Gráfico N° 1.48**  
**PERÚ: VOL. VENTA - HARINA DE TRIGO, 1994-2009**  
(Miles de toneladas métricas)



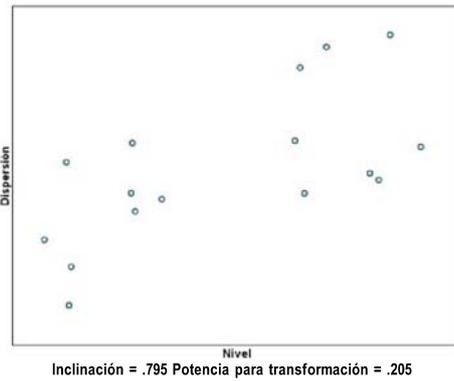
**Gráfico N° 1.49**  
**PERÚ: VOL. VENTA-ALIMENTOS BALANCEADOS - AVES, 1994-2009**  
(Miles de toneladas métricas)



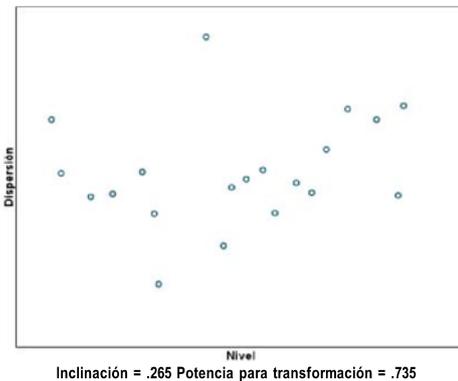
**Gráfico N° 1.50**  
**PERÚ: VOL. VENTA LECHE EVAPORADA, 1994-2009**  
(Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.51**  
**PERÚ: VOL. VENTA DE ACEITE VEGETAL, 1994-2009**  
(Miles de toneladas métricas)



**Gráfico N° 1.52**  
**PERÚ: VOL. PROD. ELÉCTRICA, 1990-2009**  
(Giga wattios-hora)



Fuente: INEI

**c. Construcción del Correlograma**

Las autocorrelaciones miden la asociación entre los valores de la serie en t y t-k momentos. Recordemos la fórmula del coeficiente de correlación simple, dados N pares de observaciones x, y:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_t (X_t - \bar{X})(Y_t - \bar{Y})}{\sqrt{\left(\sum_t (X_t - \bar{X})^2\right)\left(\sum_t (Y_t - \bar{Y})^2\right)}}$$

De igual forma, dada una secuencia temporal de N observaciones  $x_1...x_N$ , podemos formar N-1 parejas de observaciones contiguas  $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots (x_{N-1}, x_N)$  y calcular el coeficiente de correlación de estas parejas.

A este coeficiente lo denominaremos coeficiente de autocorrelación de orden 1 y lo denotamos como r1. Análogamente se pueden formar parejas con puntos separados por una distancia de 2 unidades en el tiempo, es decir  $(x_1, x_3), (x_2, x_4)$ , etc. y calcular el nuevo coeficiente de autocorrelación de orden 2.

De forma general, si preparamos parejas con puntos separados una distancia k, calcularemos el coeficiente de autocorrelación de orden k.

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_t (X_t - \bar{X})^2}$$

para k= 1, 2, .....

El gráfico de las autocorrelaciones se denomina "correlograma" y se espera que una serie de tiempo que sea estacionaria presente un patrón decreciente de las autocorrelaciones, siendo siempre las primeras mayores que las siguientes. Además la primera autocorrelación deberá

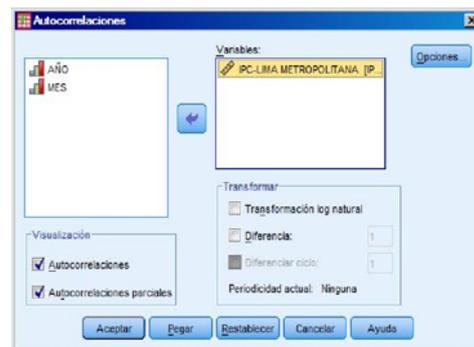
ser menor que la unidad. (En el siguiente capítulo se detalla el sustento teórico correspondiente).

Para las series estacionales, la presencia de estacionalidad también se ve reflejado en el correlograma por el patrón de repetición periódico de las autocorrelaciones a partir de un valor de estacionalidad "s" que se repite en sus múltiplos 2s, 3s, 4s,.....

**Ejemplo:**

**4. Mostrar el procedimiento de construcción de las primeras autocorrelaciones de la serie IPC.**

- i. Seleccione el menú Analizar, Predicciones y la opción Autocorrelaciones.
- ii. Ingrese la Variable en estudio (IPC)
- iii. Active en "Visualización" autocorrelaciones.
- iv. Elija "Opciones" e indique la cantidad de autocorrelaciones que deberá presentar el gráfico. Se sugiere que el número especificado (que en adelante llamaremos "K") sea aproximadamente igual a la cuarta parte de los datos a fin de que se refleje también la estacionalidad.



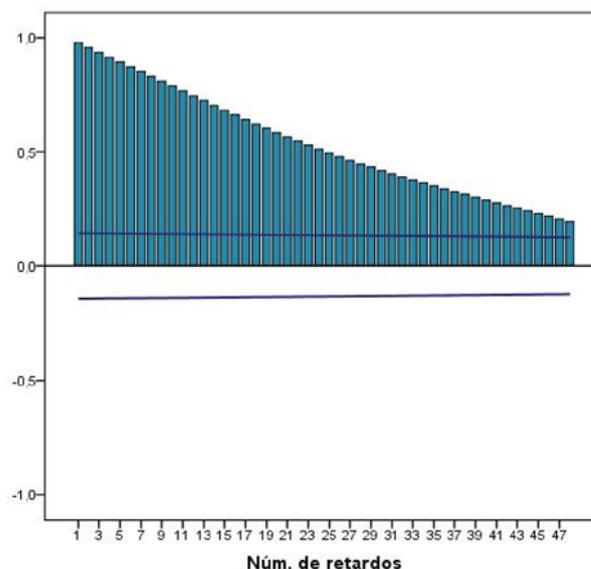
Para la serie indicada, el resultado será el gráfico que a continuación se muestra cuyos valores se presenta en la tabla adjunta.

**Gráfico N° 1.53**  
**LIMA METROPOLITANA: CORRELOGRAMA DEL IPC, 1994-2009**  
**(Año Base 2009=100,0)**

**Autocorrelaciones**

Retardo	Autocorrelación
1	,979
2	,959
3	,939
4	,919
5	,899
6	,880
7	,860
8	,841
9	,822
10	,803
11	,784
12	,765
13	,745
14	,726
15	,707
16	,689
17	,670
18	,651
19	,632
20	,613

Fuente: INEI



- La autocorrelación de orden 1:  $\rho_1 = 0.979$  indica que lo ocurrido en el momento  $t$  se asocia en un 97,9% respecto a su pasado inmediato.
- La autocorrelación de orden 2:  $\rho_2 = 0.959$  indica que lo ocurrido en el momento  $t$  se asocia en 95,9% respecto a dos momentos atrás en el tiempo.
- La autocorrelación de orden 20:  $\rho_{20} = 0.613$  indica que lo ocurrido en el momento  $t$  se asocia en 60,3% respecto a 20 momentos atrás en el tiempo.

Se espera que las autocorrelaciones de mayor orden sean menores, es decir, que la asociación sea cada vez más débil conforme pasa el tiempo.

**d. Construcción del Periodograma**

Teóricamente toda serie de tiempo está formada por suma de sinusoidales y cosenoidales (funciones armónicas) en diferentes frecuencias ( $w$ ) y amplitudes (alturas de las ondas armónicas).

$$f(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt)$$

*Por lo tanto sería ideal identificar:*

*¿Qué frecuencias son las más importantes para caracterizar la serie?*

*¿Qué tan importantes son?*

*¿Con qué componente de la serie se asocian estas características importantes?*

En 1898 Schuster ideó una herramienta exploratoria, cuyo objetivo es detectar las frecuencias en las que  $f(t)$  presentan aspectos importantes. Esta herramienta recibe el nombre de "periodograma" y en general se trata de buscar la asociación entre frecuencia - intensidad. Para ello definiremos sus partes principales:

A, B: amplitudes que determinan los valores mínimo y máximo que toma la función.

.  $f$ : frecuencia de repetición de una onda en una unidad de tiempo.

.  $w$ : frecuencia angular  $w = 2\pi f$

.  $p$ : periodo,  $p = 2\pi / w$

La frecuencia se relaciona en forma inversa con el periodo, de esta manera  $p = 1/f$ .

$I(w)$  : intensidad asociada a la frecuencia  $w$ , luego:

$$I(w) = (a(w))^2 + (b(w))^2$$

Donde:  $a(w) = (2/N) \sum Y_t \cos(wt)$

$$b(w) = (2/N) \sum Y_t \sin(wt)$$

Para  $w \in (0, \pi)$  se construye la gráfica conocida como periodograma en el cual interesa ubicar en qué frecuencia se producen las máximas intensidades y luego por una relación inversa detectar a qué periodicidad corresponden.

En el siguiente cuadro, se detalla los cálculos necesarios para la obtención de cada uno de los valores de "intensidad" del periodograma para cada frecuencia " $w$ ".

**Cuadro N° 1.7**  
**Construcción del Periodograma de la serie IPC**

T	Período P	Frecuencia F = 1/P	Frecuencia Angular W = F x 2 Pi	Amplitud cosenoidal A(w)	Amplitud sinusoidal B(w)	Intensidad de la frecuencia I(w)
1	36	0,03	0,2			
2	18	0,06	0,3			
3	12	0,08	0,5			
4	9	0,11	0,7			
5	7	0,14	0,9			
6	6	0,17	1,0			

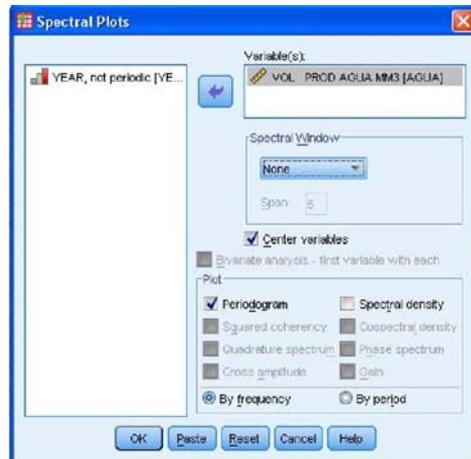
El periodograma es una herramienta exploratoria. A partir del periodograma podemos identificar en qué periodo la serie presenta una estacionalidad (o ciclo) de importancia para el estudio de la serie.

El analista debe fundamentar conceptualmente qué hace que se presente esta estacionalidad o ciclo y considerar su trascendencia en la modelización de la serie.

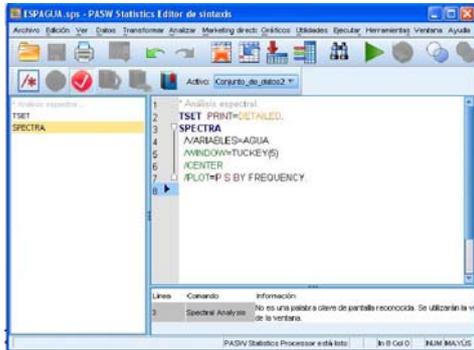
**Ejemplo:**

**1.6 Mostrar el procedimiento de construcción del periodograma de la serie INTENSIDAD DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN DE AGUA, 1990 - 2010**

- i. Seleccione el menú Analizar, Predicciones y la opción Análisis Espectral.
- ii. Ingrese el nombre de la variable, marcamos "centrar variables"
- iii. Active "periodograma" "por frecuencia"



El resultado será el gráfico del periodograma. Sin embargo, podemos acceder a la sintaxis del Periodograma especificando los siguientes comandos en la opción "pegar":



Esta sintaxis se ejecuta con la opción "EJECUTAR" que aparece en la barra de menú.

De esa manera, podemos obtener el listado conteniendo la intensidad y las frecuencias de mayor importancia para caracterizar la serie. La tabla siguiente muestra sólo una parte del listado resultante; sin embargo usualmente examinamos sólo las primeras 20 o 25 frecuencias.

**Gráfico N° 1.8**  
**LIMA METROPOLITANA: INTENSIDAD DEL**  
**VOLUMEN DE PRODUCCIÓN DE AGUA,**  
**1990 - 2010**  
**(Milímetros cúbicos)**

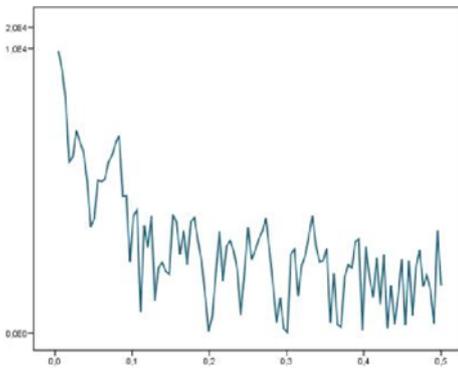
	Frecuencia	Transformación Seno	Transformación Coseno	Periodograma
1	,00000	,000	13,827	,000
2	,00446	-9,366	3,305	11048,375
3	,00893	-6,461	-2,044	5143,142
4	,01339	-3,355	-1,423	1487,594
5	,01786	-1,214	-,018	165,041
6	,02232	-1,140	-,579	183,210
7	,02679	-2,675	,063	801,980
8	,03125	-,984	-,723	167,003
9	,03571	,739	-,296	71,020
10	,04018	-,701	,297	64,971
11	,04464	-1,338	,855	282,452
12	,04911	-,594	-,188	43,524
13	,05357	-,706	-,441	77,637
14	,05804	-,503	-,050	28,629
15	,06250	-,231	,221	11,438
16	,06696	-,024	,607	41,272
17	,07143	-,825	,704	131,685
18	,07589	-1,564	1,092	407,518
19	,08036	-3,046	,149	1041,448
20	,08482	-1,092	-2,453	807,680
21	,08929	,081	-1,294	188,305

Se ha resaltado las intensidades más altas que se presentan en las frecuencias 0.03922, 0.04412 y 0.08333

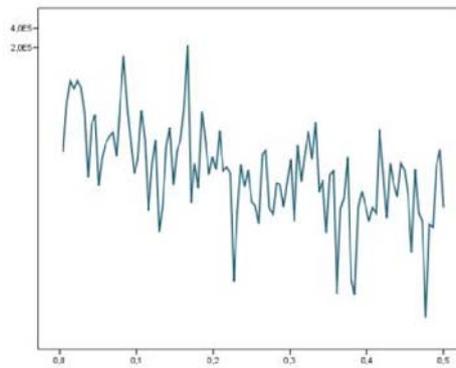
Fuente: INEI

**Plantilla N° 5. Periodogramas de las series en estudio**

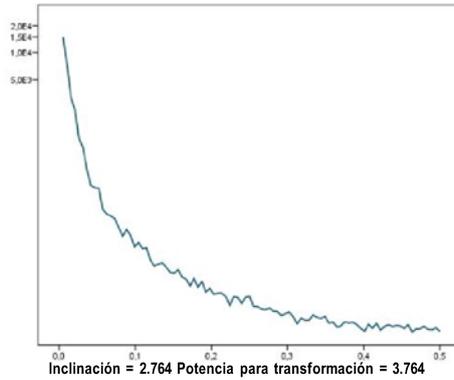
**Gráfico N° 1.54**  
**PERÚ: PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992-2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



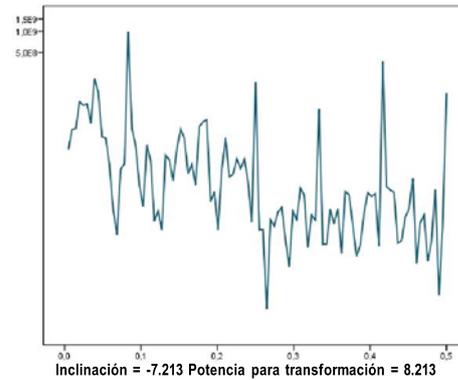
**Gráfico N° 1.55**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



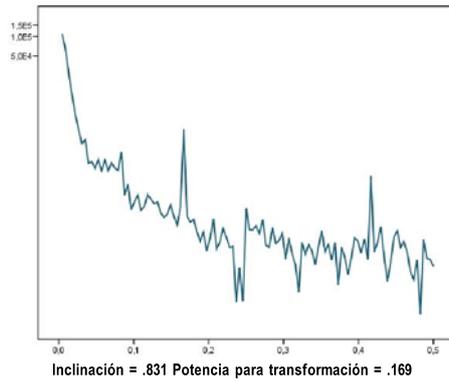
**Gráfico N° 1.56**  
**LIMA METROPOLITANA: IPC, 1994-2009**  
(Año Base 2009=100,0)



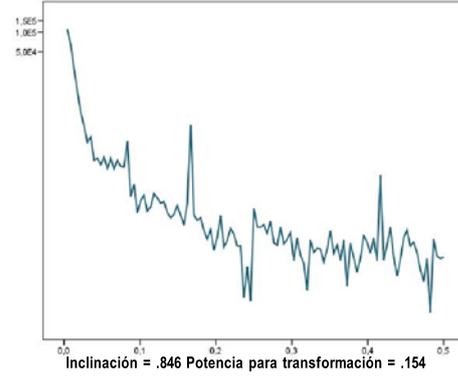
**Gráfico N° 1.57**  
**PERÚ: VOLUMEN DE PRODUCCIÓN DE AGUA, 1993-2009**  
(Milímetros cúbicos)



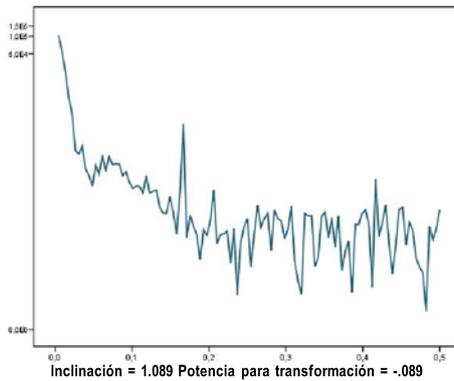
**Gráfico N° 1.58**  
**PERÚ: PBI, 1991-2009**  
(Año Base 1994=100,0)



**Gráfico N° 1.59**  
**PERÚ: PBI-TOTAL INDUSTRIAS, 1991-2009**  
(Año Base 1994=100,0)



**Gráfico N° 1.60**  
**PERÚ: PBI-MANUFACTURA, 1991-2009**  
(Año Base 1994=100,0)



**Gráfico N° 1.61**  
**PERÚ: PBI - COMERCIO, 1991-2009**  
(Año Base 1994=100,0)

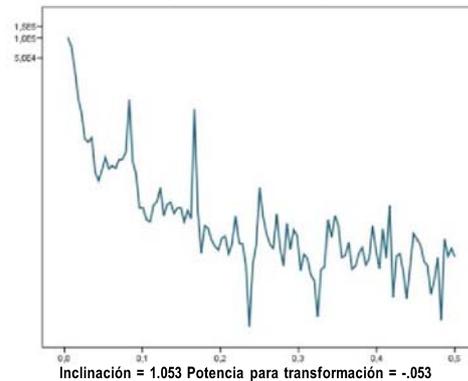


Gráfico N° 1.62  
PERÚ: VOL. VENTA - HARINA DE TRIGO, 1994-2009  
(Miles de toneladas métricas)

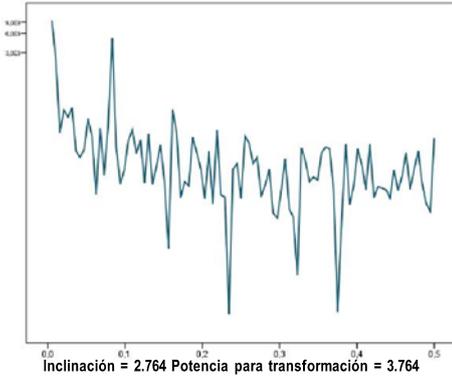


Gráfico N° 1.63  
PERÚ: VOL. VENTA-ALIMENTOS BALANCEADOS - AVES, 1994-2009  
(Miles de toneladas métricas)

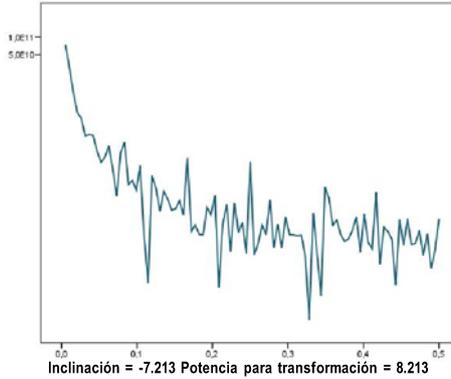


Gráfico N° 1.64  
PERÚ: VOL. VENTA LECHE EVAPORADA, 1994-2009  
(Miles de toneladas métricas)

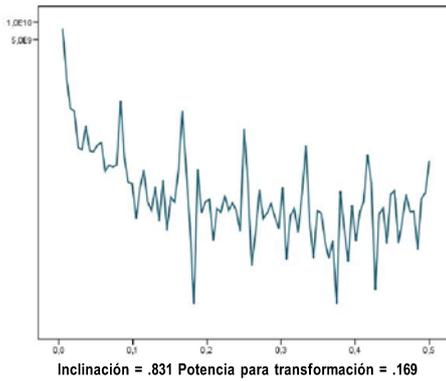


Gráfico N° 1.65  
PERÚ: VOL. VENTA DE ACEITE VEGETAL, 1994-2009  
(Miles de toneladas métricas)

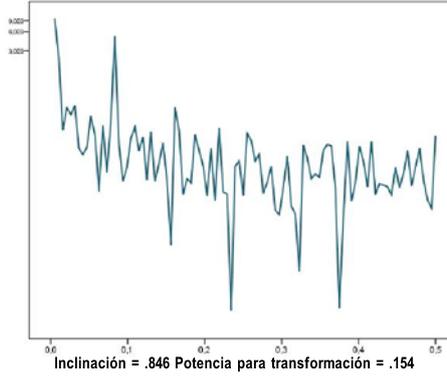
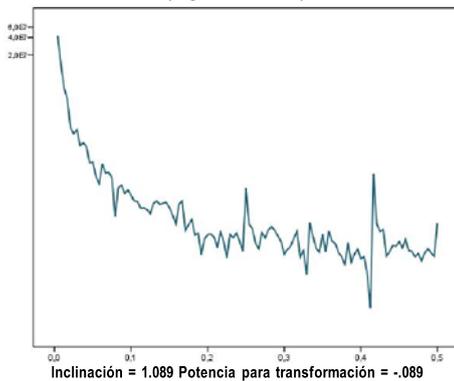


Gráfico N° 1.66  
PERÚ: VOL. PROD. ELÉCTRICA, 1990-2009  
(Giga wattios-hora)



Fuente: INEI

### 1.3.1 Identificación de Tendencia y Ciclos

**¿Qué debemos entender por Tendencia?**

Definamos la tendencia ( $T_t$ ) como la componente a largo plazo de la serie  $Y_t$  que representa el cambio de la media a lo largo del periodo de observación.

Los tipos de Tendencia son:

- a) *Estable o al nivel*:  $T_t$  se mantiene constante o invariante dentro de un intervalo de fluctuación fijo a lo largo del tiempo.

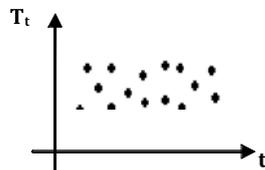


Figura 1.1: Tendencia Estable

- b) *Creciente - Decreciente*: Observando desde el momento  $T_0$  hasta  $T_n$  se muestra un crecimiento sostenido, tendencia creciente, (Figura 2), o un decrecimiento sostenido, tendencia decreciente, (Figura 3). Este comportamiento puede presentarse en forma lineal o exponencial.

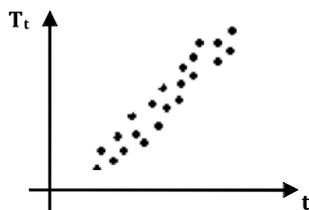


Figura 1.2: Tendencia Creciente

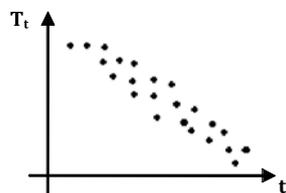


Figura 1.3: Tendencia Decreciente

- c) *Cambiante*: Analizando el comportamiento de la serie desde el punto inicial  $T_0$ , se observan

puntos de inflexión no repetitivos, que pueden sugerir una curva tipo polinomio de segundo o tercer grado o un crecimiento modificado. (Graf 1.3.1.c y Graf 1.3.1.d)

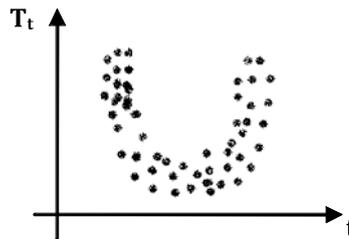


Figura 1.4: Tendencia Polinomio de Segundo Orden

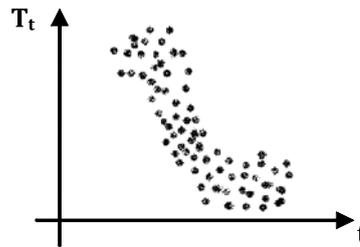


Figura 1.5: Tendencia Polinomio de Tercer Orden

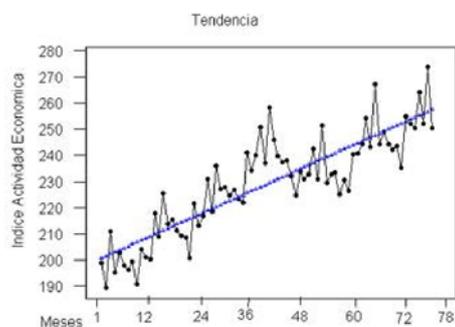
Al margen de la herramienta que se use, debemos recordar que la tendencia es un componente a largo plazo; en consecuencia, para su identificación debemos inspeccionar el comportamiento de la serie de manera panorámica dentro del periodo de observación, y evitar incurrir en el análisis por "tramos".

**¿Cómo identificar el tipo de tendencia?**

Dependiendo de la naturaleza de la serie, la identificación puede realizarse de manera directa a través del gráfico de la serie original o mediante otros recursos como las cajas simples o los filtros.

**Gráfico de serie original:** Generalmente para series de registro anual o cuando la presencia de las otras componentes, incluyendo los puntos discordantes, lo permita, la identificación del tipo de tendencia es posible por simple inspección del gráfico de secuencias de la serie original.

**Gráfico N° 1.67**  
**LIMA METROPOLITANA: PEA, 2002/09**  
**(Miles de personas)**



Fuente: INEI

De no ser clara la identificación con esta herramienta, pasamos a usar el gráfico de cajas simples.

**Aplicación:**

- Obsérvense los gráficos con los datos originales de las series en estudio en la Plantilla N°1, en las cuales se ilustran los diferentes tipos de tendencia.
- Elabore un diagnóstico previo por simple inspección acerca del tipo de tendencia y características básicas de las series en las cuales es posible.

**Gráfico de cajas simples:** Tal como se detalló anteriormente, en la construcción de las cajas se resume el comportamiento de la serie según la unidad de registro de mayor nivel en el tiempo. De esta manera las series de registro mensual son agrupadas en cajas, cada una de las cuales representa 1 año.

Para la identificación del tipo de tendencia, debemos observar la posición general de las cajas y observar si se alinean una junto a la otra (tendencia estable) o en posiciones ascendente o descendente (tendencia creciente o decreciente).

**Aplicación:**

- Observe el gráfico de cajas simple de las series en estudio, que aparecen en la Plantilla N° 2 y complete el diagnóstico de tendencia.
- En qué series se presentan datos discordantes. ¿Será necesario prescindir de esos datos? ¿En qué casos cree conveniente hacerlo?

**Uso de filtros:**

Una forma de visualizar la tendencia, es mediante la suavización de la serie. La idea central es definir a partir de la serie observada una nueva serie que filtra las otras componentes a corto plazo (estacionalidad, aleatoriedad), de esta forma será posible identificar el tipo de tendencia.

Los filtros tienen como finalidad eliminar las variaciones de la serie que se presentan a corto plazo, con el objeto de apreciar con mayor claridad su comportamiento a largo plazo (tendencia y ciclos).

En el siguiente gráfico, observamos la serie original  $X(t)$  y la serie suavizada  $Z(t)$ , observemos que la serie original presenta variaciones a corto plazo que con el filtrado son eliminados pudiendo observarse únicamente la tendencia.

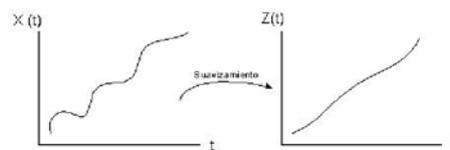


Figura 1.6: Filtros

Al filtrar lo que hacemos es usar una expresión lineal que transforma la serie  $X(t)$  en una serie suavizada  $Z(t)$ .



Los filtros más conocidos son:

- " Promedios Móviles Centrados
- " Suavización Exponencial Simple

**Promedios Móviles Centrados:** Usaremos promedios móviles a fin de eliminar de la serie la estacionalidad y la aleatoriedad.

Sea  $Z(t)$  con estacionalidad anual ( $s = 12$ ), la serie filtrada por promedios móviles se obtiene mediante:

$$Z(k) = \frac{Z(k-6) + Z(k-5) + \dots + Z(k+5) + Z(k+6)}{12}, \quad 7 \leq k \leq n-6$$

Para  $Z(t)$  trimestral, con estacionalidad anual ( $s = 4$ ), la serie filtrada está dada por:

$$Z(k) = \frac{Z(k-2) + Z(k-1) + Z(k+1) + Z(k+2)}{4}, \quad 3 \leq k \leq n-2$$

**Ejemplo:**

5. Hallar la serie filtrada por Promedios Móviles Centrados de amplitud 7 para la serie IPC. Para ello sumaremos los valores de la serie en grupos sucesivos de  $K=7$  datos y dividiremos las sumas por " $S = 12$ "

El cálculo sería:

$$Z(7) =$$

$$\frac{\frac{1}{2} Z(1) + Z(2) + Z(3) + Z(4) + Z(5) + Z(6) + Z(7) + Z(8) + Z(9) + Z(10) + Z(11) + Z(12) + \frac{1}{2} Z(13)}{12}$$

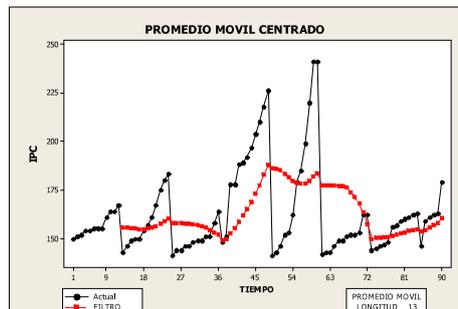
$$Z(8) =$$

$$\frac{\frac{1}{2} Z(2) + Z(3) + Z(4) + Z(5) + Z(6) + Z(7) + Z(8) + Z(9) + Z(10) + Z(11) + Z(12) + Z(13) + \frac{1}{2} Z(14)}{12}$$

Y así sucesivamente...

De la misma manera, podemos aplicar un filtro más amplio de  $k = 13, 15, \dots$

**Gráfico N° 1.68**  
**LIMA METROPOLITANA: IPC, 1994-2009**  
**(Año Base 2009=100,0)**



Fuente: INEI

Los promedios móviles (y las medianas móviles) tienen mayor o menor efecto dependiendo de la amplitud de suavización, es decir, de la cantidad de datos que son tomados en cada promedio (o mediana) móvil. Las amplitudes más usadas son 3, 5, 7, 9. Mientras mayor sea la amplitud, el efecto del filtrado será mayor, pero esto trae como consecuencia que se pierda un mayor número de datos tanto al inicio como al final de la serie.

**Medianas Móviles**

Otra alternativa para filtrar una serie es con medianas móviles como una variante a los promedios móviles. Este método es más recomendado cuando se presenta observaciones discordantes. Al igual que en el caso anterior, el mayor o menor efecto depende de la amplitud tomada al aplicar medianas móviles.

**Suavización Exponencial Simple:**

El método de suavización exponencial simple puede ser usado también para filtrar una serie. Este método consiste en construir una serie suavizada sobre la base de ponderaciones que multiplican los datos originales y la serie suavizada, un momento atrás en el tiempo.

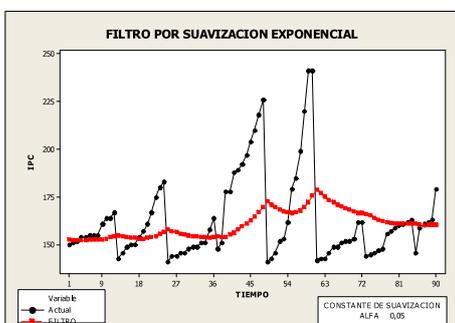
Dada la serie de tiempo  $X(t)$ , y una constante de suavización  $\alpha$  ( $0,1$ ) podemos filtrar las componentes a corto plazo mediante:

$$S(t) = \alpha X(t) + (1-\alpha) S(t-1)$$

donde  $S(0) = \frac{X(1) + X(2)}{2}$  preferiblemente  $X(1)$  y  $X(2)$  datos históricos.

Observemos que mientras menor es el valor de  $\alpha$  menor es el peso que se le da a los datos originales de la serie y mayor el peso que se da al suavizado.

**Gráfico N° 1.69**  
**LIMA METROPOLITANA: IPC, 1994-2009**  
 (Año Base 2009=100,0)



Fuente: INEI

**¿Qué debemos entender por Ciclos?**

*Los ciclos son movimientos repetitivos a largo plazo, cuya periodicidad es mayor a un año.*

Para observar ciclos debemos tener una serie con una longitud no menor a 7 años.

El comportamiento cíclico de la serie puede ser regular o irregular. En el primer caso, la periodicidad es constante; mientras que en el segundo caso la periodicidad oscila dentro de un rango de fluctuación.

**¿Cómo identificar los ciclos?**

*Al igual que en el caso de la tendencia, podemos observar la presencia de los ciclos mediante el gráfico de la serie original o mediante el gráfico de cajas simples. Sin embargo, el gráfico del periodograma es de mucha utilidad por cuanto permite descubrir la periodicidad de los ciclos y evidenciar aquellos movimientos cíclicos ocultos en la serie.*

Para series con datos mensuales, se recomienda proceder a la identificación de los ciclos a partir de la serie filtrada (eliminación de las componentes a corto plazo).

Identificación mediante el periodograma:

En párrafos anteriores, hemos definido el periodograma y su construcción. Usando esta herramienta, los "picos" más altos del periodograma

ubicados en frecuencias  $w_i < 0.08$  corresponden a "ciclos" por cuanto  $1/w_i > 12$  (meses)

Aun cuando el periodograma nos muestra posibles ciclos, dependerá del investigador decidir si estos valores deben ser considerados efectivamente.

Cuando el número de datos en la serie de tiempo es menor a 96, resulta difícil identificar ciclos. En este caso, el gráfico de la serie suele presentar una sola "onda cíclica" la cual puede ser confundida con tendencia de tipo Polinómica de grado 2 o puede sugerir ciclos espurios.

**1.3.2 Identificación de Estacionalidad**

**¿Qué debemos entender por Estacionalidad?**

*La estacionalidad es el movimiento repetitivo a corto plazo, cuya periodicidad (o patrón de repetición) es menor o igual a un año. Dependiendo del tipo de registro se tendrá:  $s = 12$  (periodicidad cada 12 meses),  $s = 3$  (periodicidad cada 3 meses),  $s = 6$  (periodicidad cada 6 meses),  $s = 7$  (periodicidad cada 7 días),  $s = 15$  (periodicidad cada 15 días), etc.*

**¿Cómo identificar la estacionalidad?**

*La estacionalidad puede ser identificada a partir de la gráfica de la serie original o mediante el gráfico de cajas agregadas. Con esta última herramienta buscamos que la disposición de las cajas nos sugiera una onda estacional.*

Sin embargo, al igual que con los ciclos, el periodograma es de mucha importancia para la identificación de la estacionalidad y la determinación de la longitud del patrón estacional (s). Los "picos" más altos del periodograma ubicados en frecuencias  $w_i \geq 0.08$  corresponden a "estacionalidad" por cuanto  $1/w_i \leq 12$  (meses).

Además, según la intensidad de los picos del periodograma se tiene de manera exploratoria una idea de la importancia de la estacionalidad en la explicación de la variabilidad de la serie.

**Tema de discusión:** ¿Cómo se ve afectada una serie con fluctuaciones periódicas tipo estacional cuando se le aplica un filtrado de amplitud mayor o

**Ejemplo:**

**6. Identificar los ciclos y la estacionalidad en la serie: Pesca de Consumo Humano Directo**

Usando la opción Análisis Espectral del PASW (el procedimiento se ha detallado en la sección Construcción del Periodograma) hemos obtenido en la Plantilla N°5 el periodograma para la serie Pesca - Consumo Humano Directo.

En este gráfico se aprecian "intensidades altas" en determinadas frecuencias que son vistas con detalle (marcadas con fondo amarillo) en el siguiente cuadro de salidas.

**Cuadro N° 1.9**  
**PERÚ: PERIODOGRAMA DE PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO, 1992 - 2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**

	Frecuencia	Trasformación seno	Trasformación coseno	Periodograma
1	.00000	.000	13,827	.000
2	.00446	-9,366	3,305	11048,375
3	.00893	-6,461	-2,044	5143,142
4	.01339	-3,355	-1,423	1487,594
5	.01786	-1,214	-.018	165,041
6	.02232	-1,140	-.579	183,210
7	.02679	-2,675	.063	807,980
8	.03125	-.984	-.723	167,003
9	.03571	.739	-.296	71,020
10	.04018	-.701	.297	64,971
11	.04464	-1,338	.855	282,452
12	.04911	-.594	-1,188	43,524
13	.05357	-.706	-.441	77,637
14	.05804	-.503	-.050	28,629
15	.06250	-.231	.221	11,438
16	.06696	-.024	.607	41,272
17	.07143	-.825	.704	131,685
18	.07589	-1,564	1,092	407,518
19	.08036	-3,046	.149	1041,448
20	.08482	-1,092	-2,453	807,680
21	.08929	.081	-1,294	188,305

Fuente: INEI

Por orden de importancia resaltan las frecuencias: 0.00446, 0.00893, 0.01339, 0.08036, 0.02679 que corresponden a los periodos: 224, 112, 75, 12, 37meses (por relación inversa).

Es decir se sugiere:

Estacionalidad	Ciclos
12 meses	224meses = 18 -19 años
	112 meses = 9 - 11 años
	75 meses = 6 - 7 años
	37 meses = 3 años

El investigador podrá encontrar relación entre los ciclos de Pesca para Consumo Humano con los ciclos del niño, que se presenta en ciclos de aproximadamente 11 años y otros ciclos económicos, decidiendo por interés particular cuál modelar.

Por otro lado, la presencia de patrón estacional debe ser necesariamente en la modelización de la serie.

Dada la longitud de la serie (19 años), el ciclo mayor sugerido debe ser descartado, ya que no hay forma de verificarlo.

**1.3.3 Exploración Gráfica del Tipo de Modelo**

Observando el gráfico de la serie original, el analista de series de tiempo podrá intuir si la serie es de tipo aditiva, cuando la variabilidad de la serie y su tendencia son estables; en caso contrario tendrá indicios para suponer que es de tipo multiplicativa o mixto.

Si este último es el caso, podemos usar el gráfico de dispersión versus nivel para confirmar nuestra sospecha acerca de una serie con comportamiento multiplicativo o mixto.

A partir de la Plantilla N° 1, encontramos que la Pesca para Consumo Humano Directo, el Volumen de Venta de Leche Evaporada y el Volumen de Venta de Aceite Vegetal son ejemplos de series en los que no hay estabilidad en la variabilidad ya que esta aumenta en relación al tiempo. Por esta razón, se sospecha que son de tipo multiplicativo.

La Plantilla N°4 en el que se presenta los gráficos de dispersión vs nivel confirma esta sospecha, ya que la disposición de los pares ordenados de

[  $\ln(\text{me})$ ,  $\ln(\text{dc})$  ] sugieren una recta con una pendiente diferente de cero.

**Tema de discusión:** Si el gráfico de la serie original parece provenir de un modelo aditivo, pero en el gráfico de dispersión vs. Nivel se sugiere una relación entre  $\ln(\text{Me})$  y  $\ln(\text{Dc})$ . ¿Se debe concluir que la serie es multiplicativa?

### 1.3.4 Exploración de la Estacionariedad:

Al iniciar el capítulo, se definió la estacionariedad y su importancia en

el trabajo en series de tiempo. La determinación de si una serie es estacionaria o no es especialmente importante en el Enfoque de Dominio del Tiempo (modelos ARIMA) que trataremos en el capítulo III, ya que es una de las condiciones sobre las que se basa el desarrollo de estos modelos. Sin embargo, por el carácter general de este capítulo trataremos sobre la detección de la No Estacionariedad de manera exploratoria.

**Cuadro N° 1.10**  
**Detección de la No Estacionariedad**

Detección de No estacionariedad	
Por Variabilidad	Por Nivel
<p>. Gráfico de la Serie Original</p> <p>Se observa aumento o disminución de la variabilidad de la serie en relación al tiempo</p> <p>. Gráfico de Dispersión vs. Nivel</p> <p>El gráfico muestra asociación entre el <math>\ln \text{ Me}</math> y <math>\ln \text{ Dc}</math>. Los puntos correspondientes a estos pares ordenados sugieren una recta con pendiente diferente de 0.</p>	<p>. Gráfico de la Serie Original</p> <p>Se observa una tendencia acelerada en el gráfico de la serie original.</p> <p>. Correlograma de Serie Original</p> <p>El esquema de las autocorrelaciones simples, cuya construcción se detalló en secciones anteriores, muestra una o más de los siguientes comportamientos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Primera autocorrelación muy cercana a "1"</li> <li>Las autocorrelaciones decaen muy lentamente.</li> <li>Las autocorrelaciones no siguen un comportamiento decreciente.</li> </ul> <p>Cualquiera de las situaciones mencionadas son indicios de no estacionariedad por nivel.</p> <p>En el capítulo de modelos ARIMA se detallará el tratamiento para series no estacionarias por nivel.</p>

**Uso del Gráfico de Dispersión vs. Nivel en el tratamiento de la no estacionariedad por variabilidad**

Cuando se sospecha que la serie de tiempo no es estacionaria por variabilidad, podemos confirmarlo observando que la pendiente mínima cuadrática ( $p$ ) de este gráfico es diferente de cero. En ese caso, Box & Tuckey propusieron un esquema de

transformaciones no lineales cuyo propósito es estabilizar la variabilidad.

La serie transformada

$$Y_t^* = \begin{cases} \ln Y_t & \text{si } \lambda = 0 \\ Y_t^\lambda & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

para

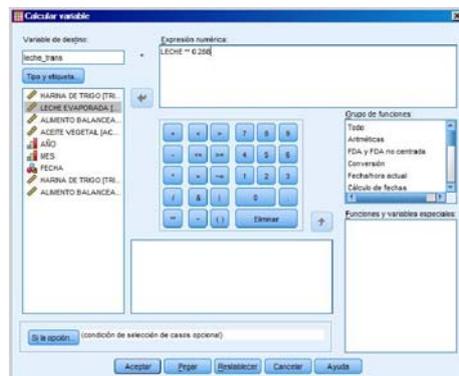
$$\lambda = 1 - p$$

El programa PASW permite encontrar el valor del  $\lambda$  de transformación por el gráfico de dispersión vs nivel y verificar el efecto de un grupo de transformaciones pre-establecidas.

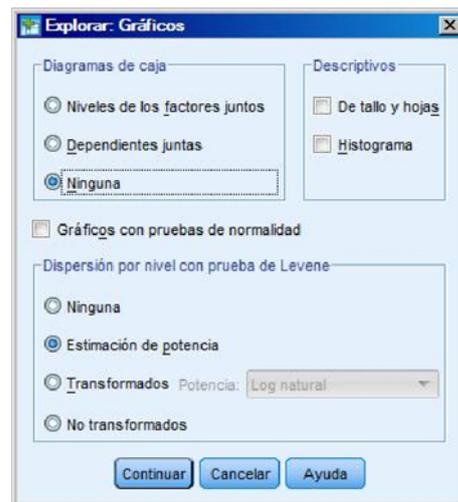
**Ejemplo:**

**7. Mostrar el procedimiento para usar el gráfico de dispersión vs. Nivel en el tratamiento de no estacionariedad por variabilidad con la serie mensual Volumen de Venta de Leche Evaporada**

- i. Siguiendo el procedimiento en PASW, detallado en la sección "construcción del gráfico dispersión vs. Nivel" hemos encontrado los gráficos de la Plantilla N° 4.
- ii. El gráfico de dispersión vs. Nivel de la serie Volumen de Venta de Leche Evaporada presenta asociación y se ajusta a una recta mínimo cuadrática con pendiente  $p=0.712$ .
- iii. Usando el esquema de transformaciones de Box y Cox, se sugiere una constante de estabilización  $\lambda = 1-p = 0.288$
- iv. Se transforma la serie original, por lo que seleccionamos Transformar y la opción Calcular variable. La variable transformada la guardamos con el nombre: leche\_trans.

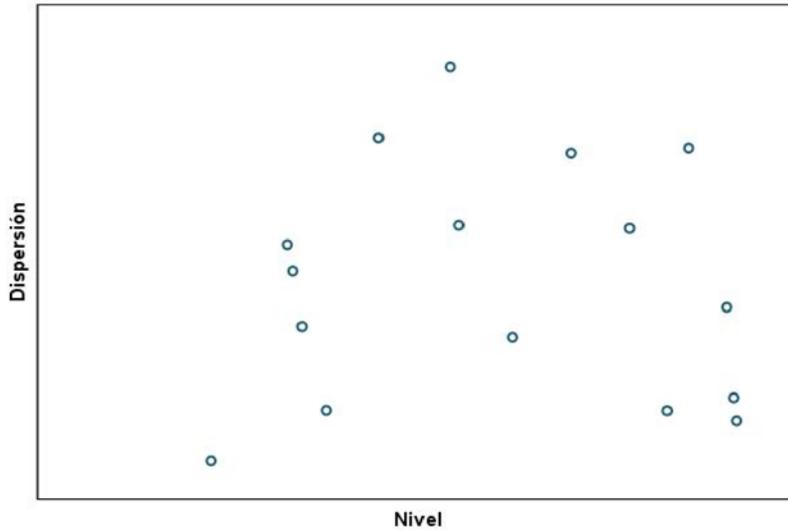


- v. Para verificar la efectividad de la transformación para estabilizar en variabilidad la serie, volvemos a hacer el gráfico de nivel dispersión vs. nivel, escogemos el menú Analizar y la opción Explorar.



- vi. Obtenemos el gráfico de dispersión vs. Nivel de la serie transformada, hallamos que la pendiente de la recta mínimo cuadrática, es próxima a "0", por lo que podemos asumir que la transformación ha sido efectiva en variabilidad.

Gráfico N° 1.70  
PERÚ: VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA \_ TRANSFORMADA, 1994-2009  
(Miles de toneladas métricas)



\* Gráfico de LN de dispersión por LN de nivel  
Inclinación = -.034 Potencia para transformación = 1.034

Fuente: INEI

La estabilidad de la serie por nivel, se trata mediante diferencias regulares o diferencias estacionales.

**Tema de discusión:**

¿Una serie puede ser no estacionaria por nivel y no estacionaria por variabilidad?  
¿Cuál de las series presentará este problema? Observar las plantillas 1, 4, 5 para sustentar su respuesta.

## **CAPÍTULO II**

# **Modelización Mediante el Enfoque de Descomposición**



*Centro de Investigación y Desarrollo*



## Modelización

Un modelo es un constructo mediante el cual es posible reproducir el comportamiento de un proceso y estudiar sus manifestaciones. Así por ejemplo, el modelo a escala de un centro comercial permite al arquitecto mostrar la funcionalidad de su proyecto antes de ejecutarlo y hacer las correcciones necesarias. De la misma manera, un modelo matemático o un modelo estadístico, resultará bueno en la medida en que represente lo más fielmente posible un proceso o una situación dada. Para el caso de las series cronológicas, los modelos en realidad, tratan de reproducir el comportamiento del proceso que generó la serie para lo cual se usan los datos de la serie de

tiempo. El propósito principal para elaborar modelos de series de tiempo es estimar la serie y hacer pronósticos.

Estos pronósticos pueden ser a corto, mediano y largo plazo y dependerá de factores como: la longitud de la serie, estabilidad del entorno, características de la serie y propósitos del investigador, para decidir qué tipo de pronóstico realizar.

Existen muchos modelos para pronósticos con series cronológicas, el siguiente cuadro resume los tipos de modelos y bajo qué condiciones elegir uno en particular.

Cuadro N° 2.1  
ENFOQUES Y TIPOS DE MODELO

	TIPO DE MODELO	CARACTERÍSTICAS DE LA S.T.	HORIZONTE DE PRONÓSTICO	PATRÓN ESTACIONAL
ENFOQUE DE DESCOMPOSICIÓN Y MÉTODOS DE SUAVIZACIÓN	Promedios móviles - Suavización exponencial simple	Series Estables Entorno a la Media General. Componentes no Determinísticas	Corto plazo ( $l \leq 3$ )	No evidencia
	Suavización exponencial doble o triple	Tendencia Lineal o Cuadrática	Corto plazo ( $l \leq 6$ )	No evidencia
	Suavización de Holt & Winters	Tendencia Lineal + Estacionalidad Determinística	Mediano plazo ( $l \leq 24$ )	$S \leq 12$
	Modelos de descomposición	Componentes a Corto Plazo ( $E_i$ ) y por lo Menos una a Largo Plazo ( $T_i, C_i$ )	Corto plazo ( $l \leq 12$ )	$S \leq 12$
	Curvas de crecimiento y crecimiento limitado (exponencial, S, gompertz, logística, exponencial modificada)	Tendencia Característica - Registro Preferiblemente Anual	Corto a mediano plazo ( $l \leq n/4$ )	No evidencia
ENFOQUE DE DOMINIO DEL TIEMPO	ARIMA	Estacionarios, Tendencia (no estacionarios), Ciclos	Corto a mediano plazo ( $l \leq n/4$ )	No evidencia
	SARIMA	Estacionarios, Tendencia (no estacionarios), Ciclos, Estacionalidad	Corto a mediano plazo ( $l \leq n/4$ )	$S \leq 12$
	ARCH - GARCH - TARCH	Series no Estacionarias	Corto a mediano plazo ( $l \leq n/4$ )	No evidencia

### 2.1 Estimación de la Serie por Promedios Móviles

En algunas situaciones, la serie presenta un comportamiento estable entorno a la media total de los datos. No se evidencia la presencia de tendencia, estacionalidad o ciclo en el periodo observado, lo cual no

quiere decir que en el proceso no estén presentes, sino que en la serie no están en forma determinística. En este caso el método de promedios móviles es una alternativa rápida para realizar pronósticos a corto plazo.

Dependiendo de la cantidad de datos que son agrupados para calcular el promedio, se denomina "promedio móvil de amplitud k".

El promedio móvil de amplitud k es la media aritmética simple de k datos consecutivos de la serie. Cada dato participa con el mismo peso. A este grupo de k datos se va incorporando consecutivamente un nuevo valor y al mismo tiempo va perdiéndose el dato más antiguo, de modo que siempre se mantiene un grupo de datos de la misma amplitud.

El promedio móvil de amplitud K, se calcula de la siguiente manera:

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-k+1}}{k}$$

#### Ventajas del Método de Promedios Móviles

1. Fácil de aplicar, puede hacerse manualmente o con cualquier programa de ayuda.
2. No necesita almacenar toda la información pasada.
3. Las estimaciones de los parámetros se actualizan fácilmente con cada nueva observación.

4. Puede usarse con pocos datos. ( hasta para t = 10 datos en series anuales)

#### Desventajas

1. Es muy sensible a los cambios o fluctuaciones de la serie.
2. Su horizonte de predicción es bastante pequeño.

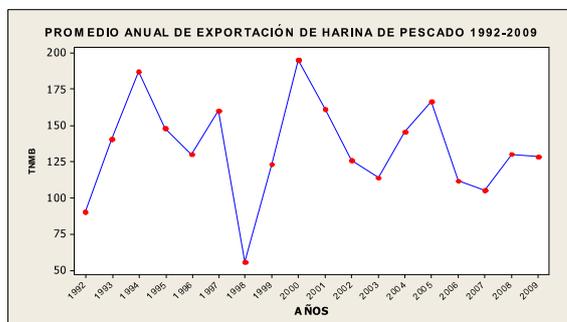
#### Aplicación:

Tomemos como ejemplo la serie Promedio Anual de Exportación de Harina de Pescado comprendida entre 1992 y 2009:

1	90,700	10	161,917
2	140,758	11	126,283
3	187,758	12	114,392
4	148,200	13	146,117
5	130,542	14	166,792
6	160,367	15	111,875
7	55,800	16	105,325
8	123,425	17	130,408
9	196,008	18	128,942

Cuyo comportamiento, como se observa en la gráfica de secuencias, es estable respecto a la media total de los datos.

**Gráfico N° 2.1**  
**PERÚ: PROMEDIO ANUAL DE EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
(Miles de toneladas métricas)



Fuente: INEI

Para k=5

$$\hat{Y}_{18+1} = \frac{Y_{18} + Y_{18-1} + Y_{18-2} + Y_{18-3} + Y_{18-5+1}}{5}$$

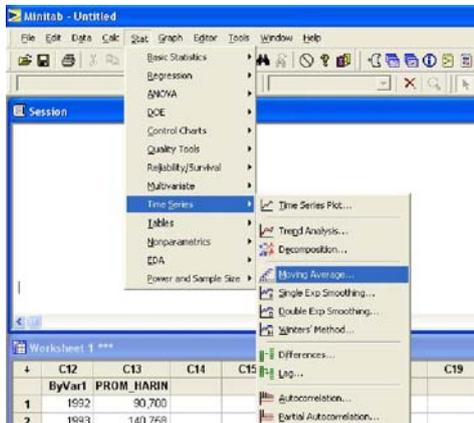
$$\hat{Y}_{19} = \frac{Y_{18} + Y_{17} + Y_{16} + Y_{15} + Y_{14}}{5} = \frac{128.942 + 130.408 + 105.325 + 111.875 + 166.792}{5} = 128.668$$

El pronóstico del año 20, se obtiene:

$$\hat{Y}_{20} = \frac{Y_{19} + Y_{18} + Y_{17} + Y_{16} + Y_{15}}{5}$$

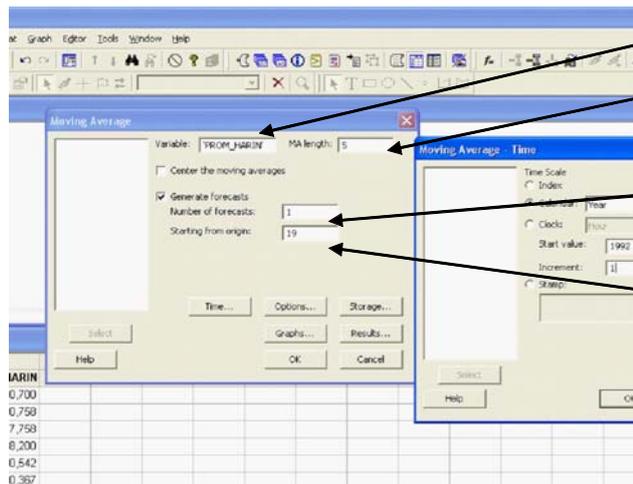
$$\hat{Y}_{20} = \frac{128.668 + 128.942 + 130.408 + 105.325 + 111.875}{5} = 121.044$$

Con el programa MINITAB VS. 16 podemos hallar las estimaciones de la siguiente manera:



. Ingresamos los datos en la cuadrícula en forma similar a una hoja de cálculo.  
 . Seguimos la ruta: Stat/ Time Series / Moving Average

Luego, en el menú de Promedios Móviles ingresamos la siguiente información:



Nombre de la serie  
 Tamaño del grupo (k)  
 Generar pronósticos  
 Número de Pronósticos (se recomienda hacerlos de 1 en 1)  
 Origen de pronósticos  
 Ingresar a Time:  
 Indicar Calendar: Year  
 Inicio : 1992

Repitiendo este procedimiento de 1 en 1 obtenemos los pronósticos deseados:

**Cuadro N° 2.2**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL PROMEDIO**  
**ANUAL DE LA EXPORTACIÓN DE HARINA**  
**DE PESCADO, 1992 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

Forecasts			
Period	Forecast	Lower	Upper
19	128,668	54,1358	203,201
Forecasts			
Period	Forecast	Lower	Upper
20	121,044	49,2223	192,865

Fuente: INEI

**Recuerde que:**

*Una de las desventajas de este método es la pérdida de valores según la amplitud del grupo, mientras más grande es K, más datos se pierden tanto al inicio como al final.*

**2.2 Estimación de la Serie por Modelos de Suavización**

**2.2.1 Suavización Exponencial Simple (SES)**

A diferencia de los promedios móviles, el método de SES otorga pesos diferentes a los valores de la serie que participan en el cálculo. Los pesos están dados por una "constante de suavización" ( $\alpha$ ) cuyo valor fluctúa entre (0,1).

La ecuación de SES es:

$$\hat{S}_t = \alpha Y_t + (1-\alpha) S_{t-1}$$

Donde:

$\hat{S}_t$  : Nuevo valor suavizado o el pronóstico para el siguiente periodo

$Y_t$  : Valor real de la serie en el periodo t

$S_{t-1}$  : Suavizado anterior

El valor inicial del suavizado puede hallarse como el promedio de datos históricos o como el promedio de los dos primeros valores de la serie.

**¿Cuándo se recomienda usar el método de SES?**

*Cuando el objetivo es estimar el nivel de la serie y mejor aún, cuando en la serie no se presenta tendencia, ciclos, estacionalidad determinística.*

Debido a las ponderaciones que se le otorga a los datos, sus resultados son mejores que los obtenidos por promedios móviles.

No debe confundirse la SES para estimación con el uso que se describió en el capítulo anterior como filtro.

SES para estimación de pronósticos debe darle mayor peso al " $\alpha$ " que a su complemento ( $1-\alpha$ ), a fin de obtener estimaciones muy cercanas a los verdaderos valores.

Al igual que con el método de promedios móviles, se debe ser parco en el horizonte a pronosticar, generalmente no se recomienda ir más allá de 3 unidades en el tiempo futuro.

**Ventajas de la SES:**

1. Fácil de aplicar. Método completamente automático.
2. No necesita almacenar toda la información pasada.
3. Las estimaciones de los parámetros se actualizan fácilmente con cada nueva observación.
4. Puede usarse con pocos datos. ( hasta para t = 10 datos en series anuales)

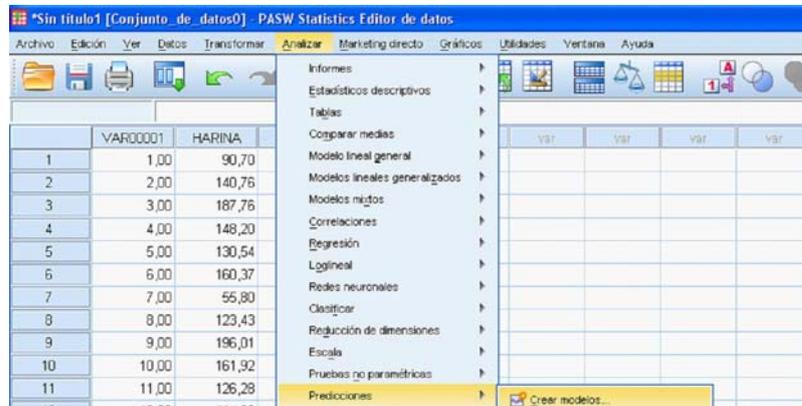
**Desventajas:**

1. Es muy sensible a los cambios o fluctuaciones de la serie.
2. Su horizonte de predicción es bastante pequeño.

**APLICACIÓN:**

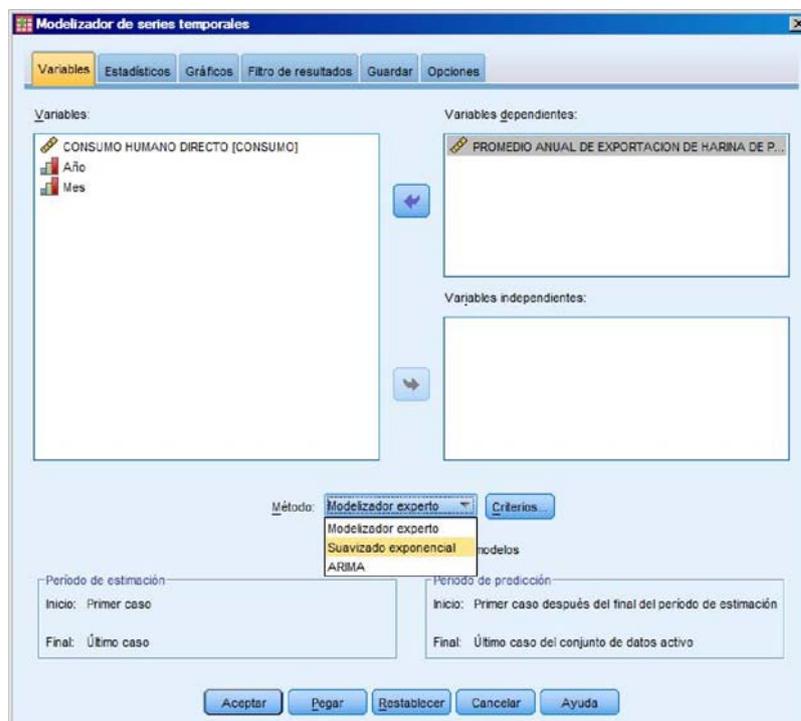
Usando el PASW, pronostique la Exportación promedio anual de Harina de Pescado para 2010.

Ingresamos a la secuencia: ANALIZAR/PREDICCIONES/CREAR MODELOS

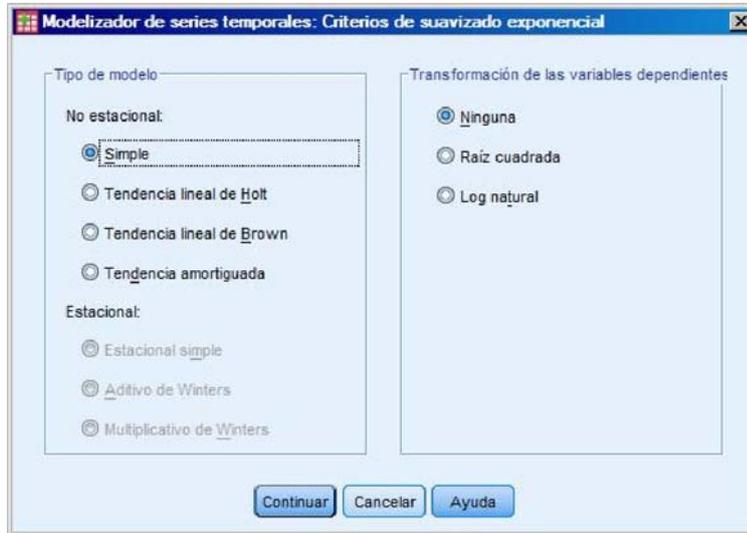


Añadimos el nombre de la serie en la venta Variables dependientes: promedio anual de exportación de Harina de Pescado.

Especificamos en "Método" Suavización Exponencial

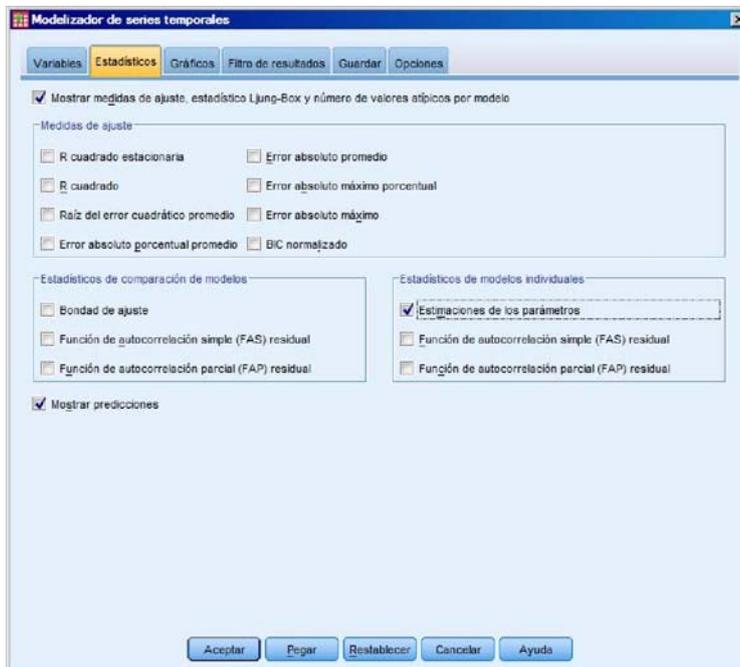


Pulsamos la pestaña "CRITERIOS" y de acuerdo a la característica de nuestra serie: especificamos el tipo de Suavización exponencial, SIMPLE

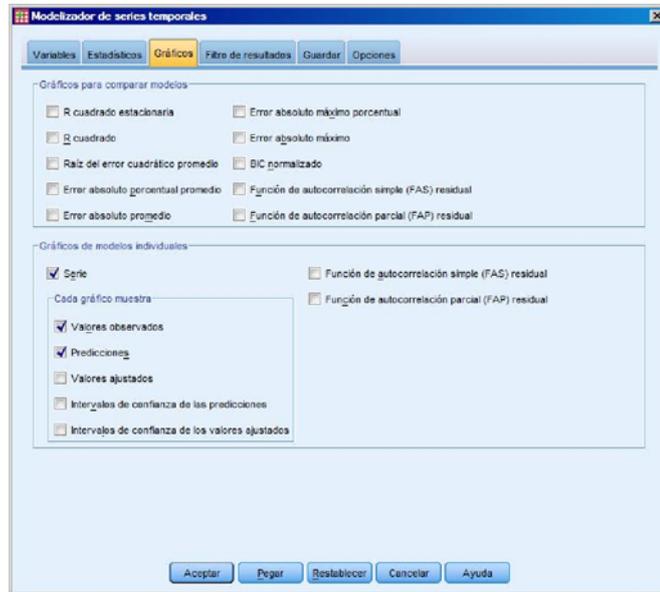


A fin de conocer la estimación de la constante de suavización con la cual se está obteniendo el ajuste, se activa la ventana "ESTADÍSTICOS" y dentro de esta marcamos: MOSTRAR MEDIDAS

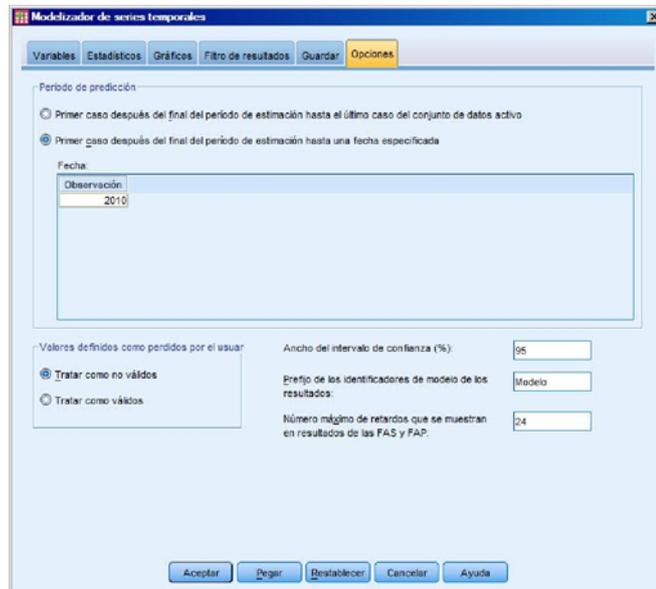
DE AJUSTE, ESTADÍSTICO LUNG-BOX Y NÚMERO DE VALORES ATÍPICOS POR MODELO. ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS, MOSTRAR PREDICCIONES.



Opcionalmente, se puede especificar los gráficos que deseamos como salidas: Gráficos / marcar: Series, valores observados, predicciones, a fin de tener los gráficos comparativos y superpuestos de lo real y lo estimado.



A fin de obtener las predicciones hasta el año que se desea, ingresamos a "opciones" y marcamos: Primer caso después del final del periodo de estimación hasta una fecha específica. Activamos con esto "fecha" e ingresamos el año hasta donde queremos pronosticar.



Los resultados de la estimación son:

**Cuadro N° 2.3**  
**PERÚ: PRONÓSTICO DEL PROMEDIO ANUAL DE LA EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO,**  
**1992 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

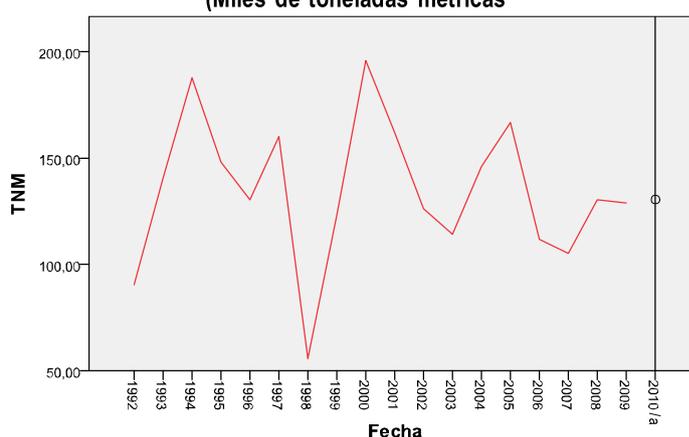
Modelo		Estimación	
Promedio Anual de Exportación de Harina de Pescado comprendida entre 1992 y 2009-Modelo_1		Sin transformación	Alpha (Nivel) ,010

**PRONÓSTICO**

Modelo	2010	
Promedio Anual de Exportación de Harina de Pescado comprendida entre 1992 y 2009-Modelo_1	<b>Previsión</b>	<b>130,63</b>
	LCS	203,23
	LCI	58,03

Fuente: INEI

**Gráfico N° 2.2.**  
**PERÚ: ESTIMACIÓN DE LA EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO, 1992-2009 Y PREVISIÓN 2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**



Previsión  
Fuente: INEI

**2.2.2 Suavización Exponencial Biparamétrico de Holt**

**¿Cuándo aplicamos la Suavización Exponencial de Holt (SEB)?**

La serie presenta tendencia creciente o decreciente, es decir  $Y_t = a + bt + e_t$ . La serie no presenta componente estacional determinístico. Preferiblemente, series con registro anual o semestral.

**¿Cómo son los pronósticos?**

Pronósticos con horizonte no mayor a 6 unidades en el tiempo.

**¿En qué consiste el método?**

De acuerdo con el comportamiento de la serie, SEB trabaja con un parámetro para el nivel y otro para la tendencia. Se usan además dos ponderaciones o constantes de suavización.

Las ecuaciones del modelo de SEB son las siguientes:

$$a_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha) [a_{t-1} + b_{t-1}] \dots \text{Ecuación para el nivel}$$

$$b_t = \beta [a_t - a_{t-1}] + (1 - \beta) b_{t-1} \dots \text{Ecuación para la tendencia}$$

$$\hat{Y}_{t+l} = a_t + \ell b_t \dots \text{Pronósticos de } \ell > 0 \text{ periodos adelante}$$

Donde  $a_t$  es el parámetro para estimar el nivel en el tiempo  $t$  y  $\beta$  es su constante de suavización,  $b_t$  es el parámetro relativo a la tendencia en el tiempo  $t$  y  $\beta$  es su constante de suavización. ( $\alpha$  y  $\beta$  toman valores entre 0 y 1).

La elección de las constantes de suavización pueden elegirse probando subjetivamente o buscando de manera progresiva, la combinación que minimice la suma de cuadrados del error (SCE) considerando como error al término definido por:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Los valores iniciales pueden ser considerados como:

$$a_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{y} \quad b_0 = Y_2 - Y_1$$

***Nota:** Algunos programas estadísticos como el Minitab, generan los valores iniciales mediante ajustes mínimo cuadrático de una recta de regresión lineal simple entre los valores de la serie y tiempo. La pendiente de esta recta, es considerada como  $b_0$  y el intercepto como  $a_0$ .*

De acuerdo con el desarrollo interactivo de la ecuación para la estimación del modelo de SEB, se llega por convergencia a demostrar que  $\hat{a}_t \in (0,2)$  y  $\hat{b}_t \in (0, 4/a - 2)$ , sin embargo, se puede dejar que el programa estime los parámetros de manera automática.

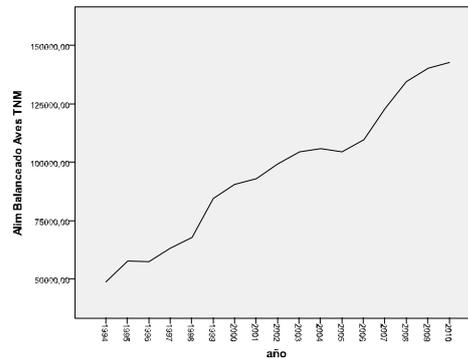
Cuando  $\alpha = \beta$  el modelo de suavización exponencial biparamétrica de Holt se convierte en el modelo de suavización de Brown.

**Aplicación:**

Para el Promedio Anual de la serie Venta de Alimento Balanceado - Aves (1994 - 2009) se observa un comportamiento de tipo lineal creciente. Estimaremos la tendencia de los cuatro próximos años.

La elección de las constantes de suavización pueden elegirse probando subjetivamente o buscando de manera progresiva, la combinación que minimice la suma de cuadrados del error (SCE) considerando como error al término definido por:

**Gráfico N° 2.3**  
**PERÚ: PROMEDIO ANUAL DE VENTA DE ALIMENTO BALANCEADO-AVES-CARNE, 1994-2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**



Fuente: INEI

**Cuadro N° 2.4**  
**PERÚ: PROMEDIO ANUAL DE VENTA DE ALIMENTO BALANCEADO-AVES-CARNE, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
48956	57791	57661	63276	67947	84769	90770	93020
2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
99465	104504	105864	104698	109775	123313	134755	140313

Fuente: INEI

Sea  $\alpha = 0.999$   $\beta = 8.841E-9$

$$a_0 = (48956 + 57791)/2 = 53373.5$$

$$b_0 = 57791 - 48956 = 8835$$

$$\hat{a}_1 = 0,999*48956 + 0,001*(53373.5 + 8835) = 48969,5855$$

$$\hat{b}_1 = 0,00000008841*(48969,5855 - 53373,5) + 0,99999999*8835 = 8834,99987$$

$$\hat{Y}_1 = 57804,59$$

$$\hat{a}_2 = 0,999*57791 + 0,001*(48969,5855 + 8834,99987)$$

$$\hat{b}_2 = 0,00000008841*(57790,85 - 48969,59) + 0,99999999*8834,99$$

$$\hat{Y}_2 = 66625,8469$$

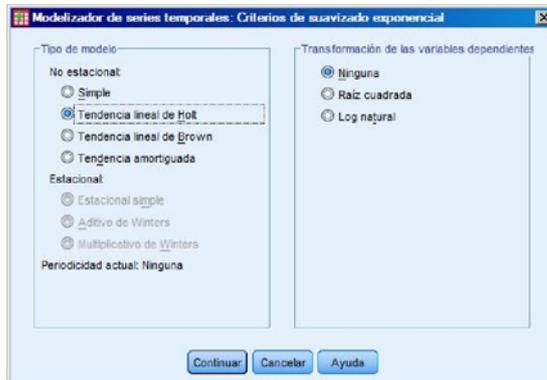
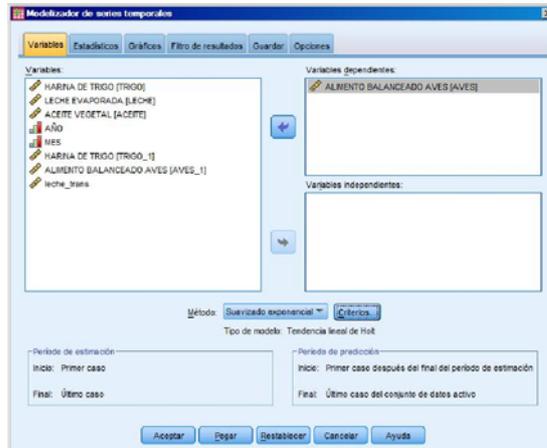
.....

Haciendo la estimación con PASW, elegimos como en el caso de la suavización exponencial simple la secuencia: ANALIZAR/PREDICCIONES/ CREAR MODELOS.

Alimento Balanceado / Especificamos en "Método" Suavización Exponencial.

Ingresamos a "CRITERIOS" y marcamos en "Tipos de Modelo" Tendencia lineal de Holt.

Añadimos el nombre de la serie en Variables dependientes: promedio anual de Venta de



Y también pedimos en la pestaña "ESTADÍSTICOS" que nos muestre los valores de las constantes de suavización y otras estadísticas de ajuste, con lo cual obtenemos el siguiente reporte:

**Cuadro N° 2.5**  
**PERÚ: ESTIMACIÓN Y PRONÓSTICO DE LA VENTA DE ALIMENTO BALANCEADO-AVES-CARNE, 1994 - 2009 Y PREVISIÓN 2010 - 2013**  
**(Miles de toneladas métricas)**

Modelo	Número de predictores	Estadísticos de ajuste del modelo	Ljung-Box Q(18)			Número de valores atípicos
		RMSE	Estadísticos	GL	Sig.	
aves-Modelo_1	0	4940,367	.	0	.	0

a. Modelos que mejor se ajustan de acuerdo con RMSE (los valores más pequeños indican un mejor ajuste).

**Parámetros del modelo de suavizado exponencial<sup>a</sup>**

Modelo	Estimación	ET	t	Sig.
aves-Modelo_1 Sin transformación Alpha (Nivel)	,999	,307	2,254	,006
Gamma (Tendencia)	8,841E-9	,309	2,860E-8	1,000

a. Modelos que mejor se ajustan de acuerdo con RMSE (los valores más pequeños indican un mejor ajuste).

**Previsión<sup>a</sup>**

Modelo		2010	2011	2012	2013
aves-Modelo_1	Previsión	146080,69	151848,23	157615,78	163383,32
	LCS	156676,72	166827,89	175959,82	184563,93
	LCI	135484,66	136868,58	139271,73	142202,71

Para cada modelo, las predicciones comienzan después del último valor no perdido del rango del período de estimación solicitado y finalizan en el último período para el que hay disponibles valores no perdidos de todos los predictores o en la fecha de finalización del período de predicción solicitado, lo que ocurra antes.

Fuente: INEI

El PASW calcula automáticamente el mejor ajuste para el modelo especificado, es decir, que encuentra la mejor combinación de las constantes de suavización  $\alpha$  y  $\beta$  con la que se obtiene el mínimo valor de suma de cuadrados del error y de otras estadísticas de comprobación.

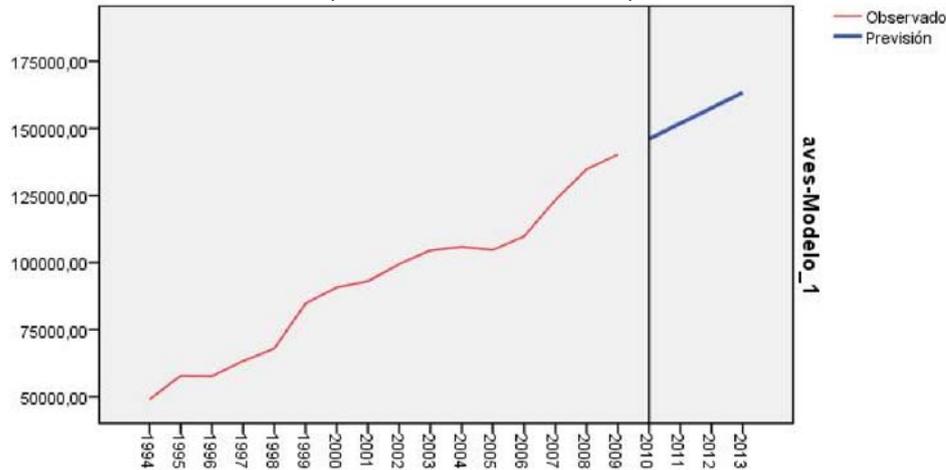
Por elección propia se ha especificado la RMSE (error cuadrático medio relativo) como estadístico de ajuste del modelo, obteniéndose un valor de 4940.367 para una combinación de  $\alpha = 0.999$   $\beta=8.841E-9$ .

Aún cuando el programa proporciona los valores de la estadística T para  $\alpha$  y para  $\beta$  con su respectivo nivel de significancia, estos no deben ser tomados en cuenta, ya que su uso es apropiado para modelos de corte transversal por el supuesto de independencia requerido en la construcción de la estadística t-Student.

En la ventana de "Previsión" se pueden encontrar los pronósticos desde el 2010 hasta el 2013.

El gráfico de la serie estimada y sus pronósticos es el siguiente.

**Gráfico N° 2.4**  
**PERÚ: PROMEDIO ANUAL DE LA VENTA DE ALIMENTO BALANCEADO-AVES-CARNE, 1994 - 2009**  
**Y PREVISIÓN 2010 - 2013**  
**(Miles de toneladas métricas)**



Fuente: INEI

### 2.2.3 Suavización Exponencial Biparamétrico de Holt & Winters

#### ¿Cuándo aplicamos el método de Holt & Winters?

Este método se aplica cuando la serie presenta:

- 1) Serie con registros menores a un año (mensuales, trimestrales, semanales, etc)
- 2) Un comportamiento con Tendencia Lineal creciente (o decreciente) y estacionalidad determinística.
- 3) Longitud de la serie no menor a 36 observaciones.
- 4) La serie puede ser de tipo aditiva o multiplicativa.

#### ¿Cómo son los pronósticos?

Los pronósticos pueden ser hasta de mediano plazo, es decir, con  $l$  no mayor a 24 unidades de tiempo.

#### ¿En qué consiste el método?

Para una serie de tiempo  $Y_t$  multiplicativa, se consideran los parámetros  $a_t$  para el nivel,  $b_t$  para la tendencia y  $c_t$  para la estacionalidad, los cuales se estiman como:

$$\hat{a}_t = \alpha \frac{Y_t}{\hat{c}_t(t-s)} + (1-\alpha) (\hat{a}_{(t-1)} + \hat{b}_{(t-1)})$$

estimación del parámetro de nivel

$$\hat{b}_t = \beta (a_t - \alpha_1((t-1))) + (1-\beta) \hat{b}_{(t-1)}$$

estimación del parámetro de tendencia

$$\hat{c}_t = \gamma \frac{Y_t}{\hat{a}_t} + (1-\gamma) (\hat{c}_t(t-s))$$

estimación del parámetro estacional por coeficientes estacionales  $\alpha, \beta, \gamma$  son las constantes de suavización, "S" es el periodo que dura el patrón de comportamiento estacional.

$\hat{Y}_t = (a_t + b_t) c_t$  serie estimada por S.E. de Holt & Winters para un modelo multiplicativo.

En el caso del modelo multiplicativo, la suma de los coeficientes estacionales es aproximadamente 12 o 1200 en términos porcentuales.

Si el tipo de modelo al cual pertenece la serie es aditivo, los coeficientes estacionales deben sumar aproximadamente "0" y los parámetros estimados se estiman como:

$$\hat{a}_t = \alpha (a_t - c_1(T - S)) + (1-\alpha) \hat{a}_{(t-1)} + \hat{b}_{(T-S)}$$

estimación del parámetro de nivel

$$\hat{b}_t = \beta (a_t - \alpha_1((t - 1))) + (1-\beta) \hat{b}_{(t-1)}$$

estimación del parámetro de tendencia

$$\hat{c}_t = \gamma(a_t - \hat{a}_{(t-1)}) + (1-\gamma) (\hat{c}_{(T-S)})$$

estimación del parámetro estacional por coeficientes estacionales  $\hat{Y}_t = a_t + b_t + c_T$ . será la serie estimada por Holt & Winters para un modelo aditivo.

Tanto en el caso multiplicativo como en el aditivo, el método de Holt & Winters requiere del cálculo de los coeficientes estacionales los cuales corresponden al patrón de comportamiento estacional de la serie y cuya construcción detallaremos en la próxima sección donde trataremos del modelo de descomposición. Por ahora usaremos los coeficientes estacionales proporcionados por el programa estadístico PASW.

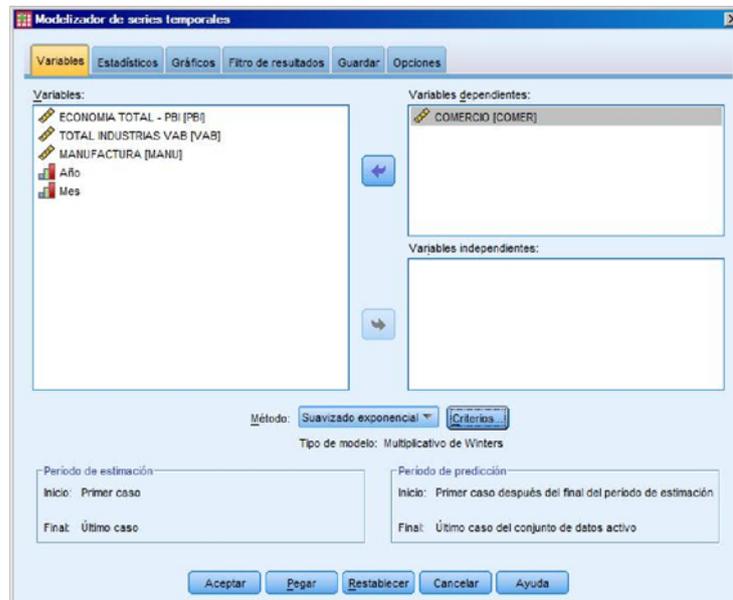
La media del último año puede ser tomada para estimar  $a(0)$ ,  $b(0)$  puede estimarse por la diferencia de promedios entre los dos últimos años, en tanto que  $c(0)$  corresponde a los coeficientes estacionales de la serie.

### Aplicación:

Tomemos la serie de tiempo de registro mensual del Indicador de Producción: COMERCIO cuyo registro es desde Enero de 1994 hasta Diciembre de 2009. El comportamiento de esta serie corresponde a una tendencia lineal creciente con componente estacional (ver Plantilla N° 1). Obsérvese además que el comportamiento de la serie es multiplicativo por cuanto la variabilidad y el nivel es variable (ver Plantilla N° 4).

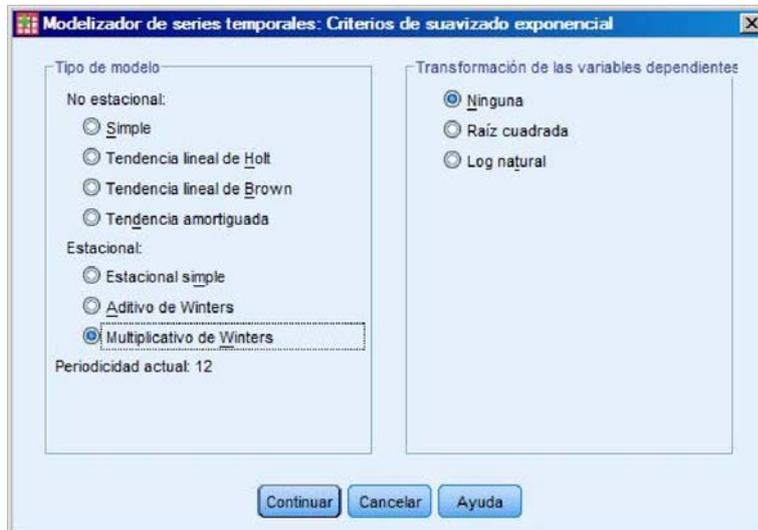
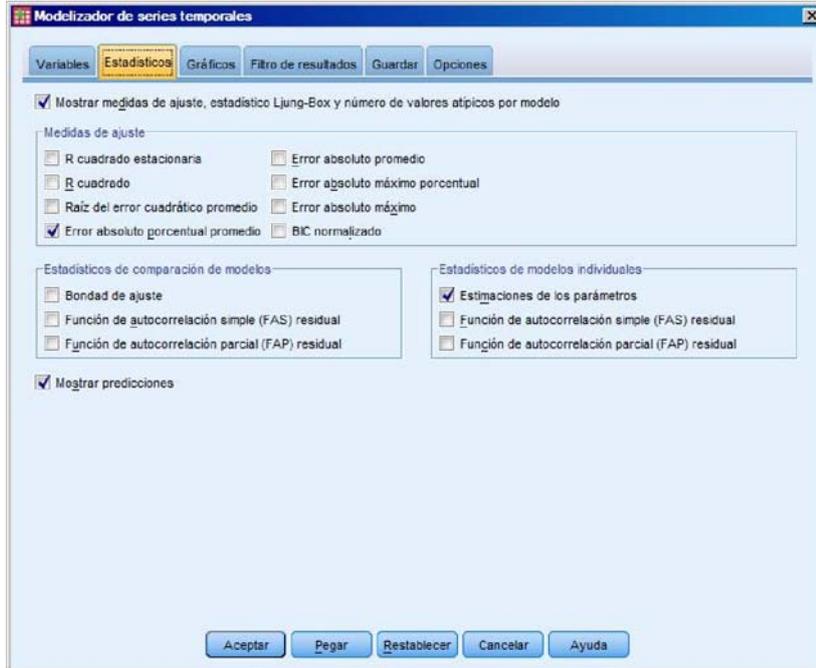
Siguiendo la misma secuencia para modelización de series de tiempo en PASW:

- " Ingresamos a: ANALIZAR/PREDICCIONES/ CREAR MODELOS
- " Añadimos el nombre de la serie en Variables dependientes: PBI-COMERCIO / Especificamos en "Método" Suavización Exponencial
- " Ingresamos a "CRITERIOS" y marcamos en "Tipos de Modelo" / ESTACIONAL / MULTIPLICATIVO DE WINTERS



" Especificamos en "ESTADÍSTICOS":  
MOSTRAR MEDIDAS DE AJUSTE / ERROR  
ABSOLUTO PORCENTUAL PROMEDIO /

ESTADÍSTICOS DE MODELOS INDIVIDUALES:  
ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS /  
MOSTRAR PREDICCIONES.



Obtenemos como resultado los siguientes reportes:

**Cuadro N° 2.6**  
**PERÚ: ESTIMACIÓN DEL PROMEDIO ANUAL DEL PBI COMERCIO, 1991 - 2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

Parámetros del modelo de suavizado exponencial

Modelo	Estimación	ET	t	Sig.	
COMERCIO-Modelo_1 Sin transformación	Alpha (Nivel)	,555	,058	9,540	,000
	Gamma (Tendencia)	,001	,015	,065	,948
	Delta (Estación)	,269	,063	4,252	,000

Fuente: INEI

Para los valores de las constantes de suavización  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  el mayor peso corresponde al nivel y a la estacionalidad, con lo cual tenemos un indicio de la importancia de estas componentes en el

comportamiento de la serie. Tal como se comentó en la sección anterior, no consideramos los resultados de la estadística T para el análisis del modelo.

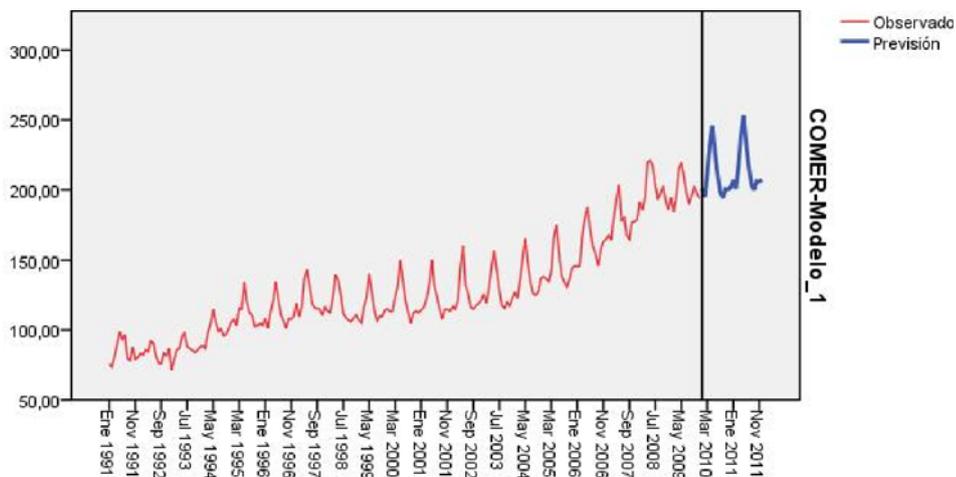
**Cuadro N° 2.7**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL PROMEDIO ANUAL DEL PBI COMERCIO, 2010 - 2011**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

PRONÓSTICOS - SERIE PBI COMERCIO ENE_2010 - DIC_2011												
2010	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Previsión	201,8	195,1	210,9	233,1	246,0	226,0	209,9	198,0	194,3	200,6	200,3	201,6
LCS	210,7	206,1	223,5	247,5	261,8	241,8	225,8	214,1	211,1	218,6	219,1	221,1
LCI	191,4	184,1	198,3	218,0	230,1	210,1	194,0	181,8	177,5	162,6	181,6	182,0
2011	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
Previsión	206,9	200,8	217,0	239,8	253,0	232,5	215,9	203,6	199,8	206,3	206,0	207,3
LCS	228,0	222,0	240,2	265,6	280,6	258,6	240,9	228,0	224,4	232,0	232,2	234,2
LCI	185,9	179,6	193,8	214,0	225,5	206,4	190,9	179,3	175,3	180,5	179,8	180,4

Fuente: INEI

Los pronósticos resultantes para los próximos 12 meses, se muestran en la tabla anterior.

**Gráfico N° 2.5**  
**PERÚ: PROMEDIO ANUAL DEL PBI COMERCIO, 1991 - 2009 Y PREVISIÓN 2010 - 2011**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



### 2.3 Estimación de la Serie por Modelos de Descomposición

El método de descomposición consiste en:

- Separar las componentes de la serie: tendencia-ciclo, estacionalidad y aleatoriedad,
- Estimar por separado, y finalmente
- Integrar las componentes estimadas (juntarlas) para tener el estimado de la serie.

La separación de las componentes de la serie puede realizarse por cualquiera de los métodos de filtrados que fueron descritos en el capítulo I (filtros: promedios móviles, suavización exponencial simple, medianas móviles).

Es importante que antes de proceder se verifique que se han realizado las siguientes tareas (ver capítulo I):

- Eliminación o reemplazamiento de valores discordantes.
- Determinación de la longitud de periodicidad (valor S)
- Determinación del tipo de modelo (aditivo o multiplicativo)

El programa PASW y otros programas ofrecen la opción de descomposición de la serie,

determinando previamente el tipo de modelo y el valor de S.

**Aplicación:** Descomponer la serie PBI General, registrada desde Enero de 1991 hasta Diciembre 2009.

- Analizamos el gráfico de la serie original en búsqueda de valores discordantes (ver plantillas N° 1, 2, 3), longitud de la estacionalidad (ver Plantilla N° 5) y tipo de modelo (ver Plantilla N°4).
- Llegamos a la siguiente conclusión:

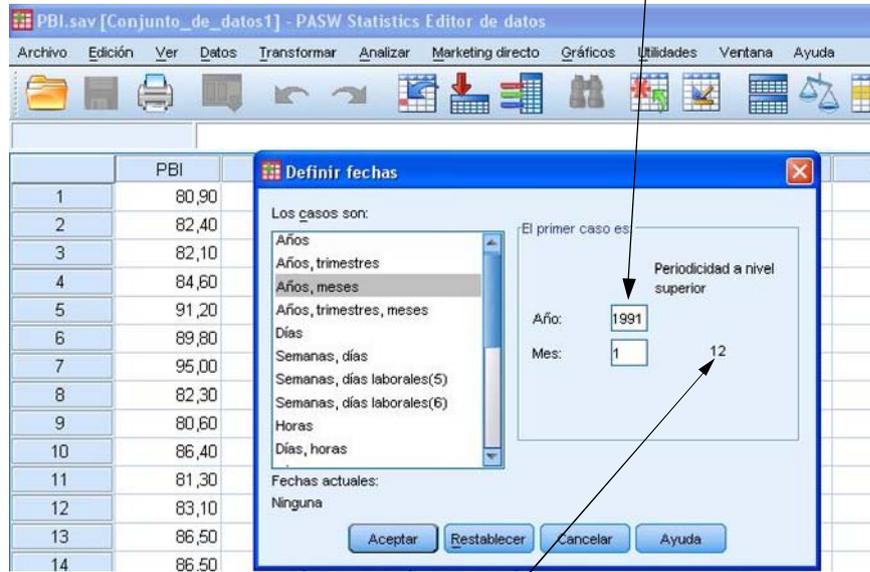
- No se verifica la existencia de valores discordantes.
- Se observa estacionalidad con  $S=12$  que se hace más evidente a partir del 1993 (ver plantilla de gráficos de cajas agregadas y periodograma).
- La variabilidad de la serie aumenta conforme pasa el tiempo, en consecuencia el tipo de modelo es multiplicativo (ver gráfico de dispersión vs. Nivel).

Ahora procedemos a la aplicación del programa:

1. Previamente definimos en el PASW, la longitud de la periodicidad y sus etiquetas del registro temporal. Para ello usamos la ventana "DATOS" / Definir Fechas

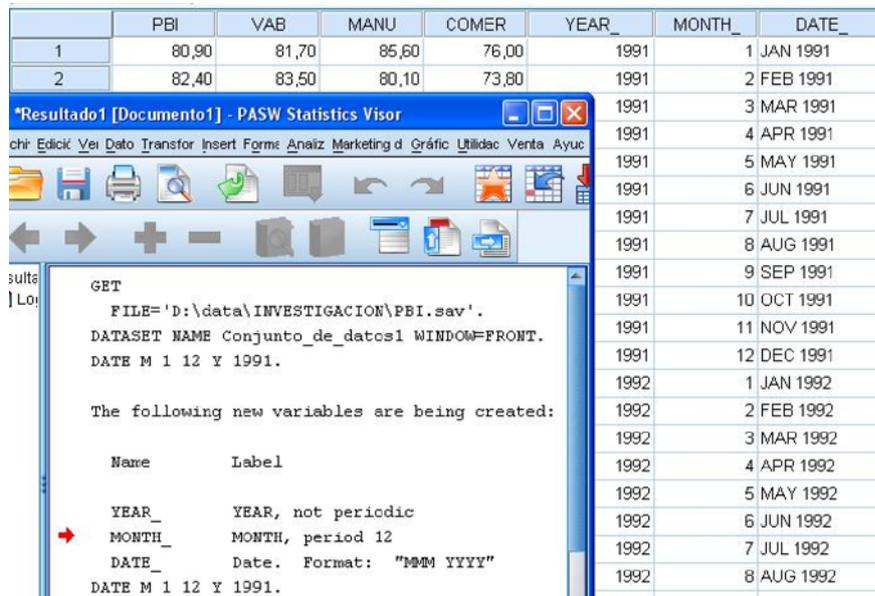


2. Especificamos el registro: años-meses y en la ventana indicamos el año y el mes del primer dato de la serie:

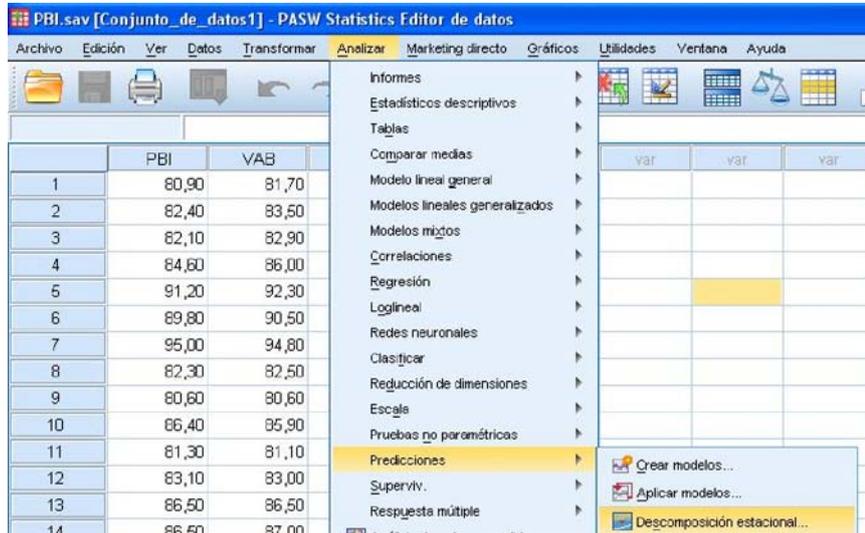


A parece la longitud de la periodicidad, para este caso  $S=12$ .

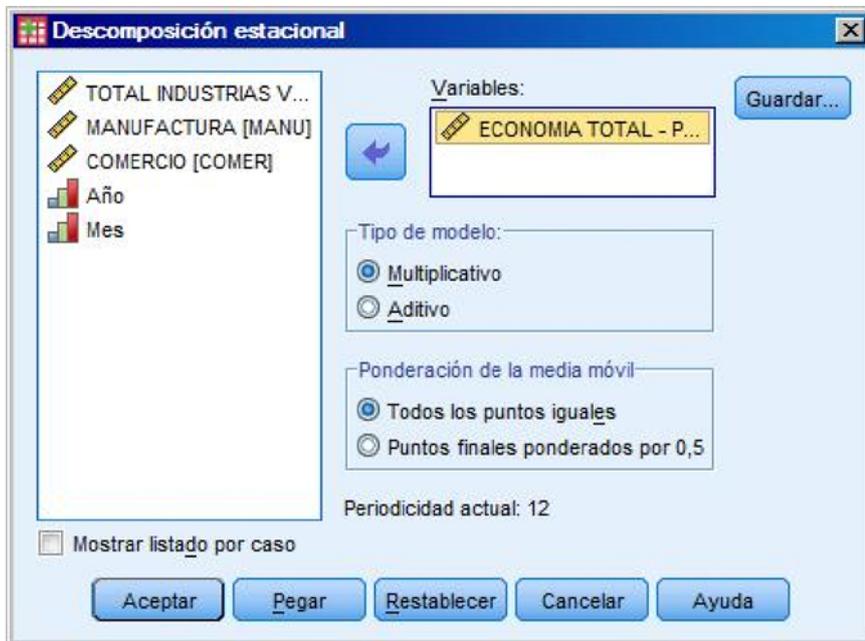
3. Al aceptar aparece el mensaje indicando que en la base de datos se han añadido las columnas correspondientes al año, mes y fecha correspondiente al registro de la serie.



4. Ahora si estamos preparados para proceder a la descomposición. Ingresamos a: ANALIZAR / PREDICCIONES / DESCOMPOSICIÓN ESTACIONAL.



5. Por el análisis preliminar, se sabe que la serie PBI es de tipo multiplicativa, por lo cual en la ventana de descomposición estacional se indica:



6. Se añaden cuatro nuevas variables a la base de datos, que corresponden a:
- a. Err\_1 : residuos
  - b. SAS\_1: Serie desestacionalizada (filtrada y sin la componente estacional)
  - c. SAF\_1: Coeficientes estacionales.
  - d. STC\_1: Muestra sólo la tendencia y ciclo de la serie ( es la versión suavizada de la salida SAS\_1)

	YEAR	MONTH	DATE	ERR_1	SAS_1	SAF_1	STC_1
1	1991	1	JAN 1991	,99244	83,70276	,96652	84,34026
2	1991	2	FEB 1991	1,02560	86,16756	,96628	84,02462
3	1991	3	MAR 1991	,96573	82,20355	,99074	83,39335
4	1991	4	APR 1991	,98456	82,08726	1,03061	83,37463
5	1991	5	MAY 1991	,98749	83,71709	1,08938	84,77806

7. En el visor de Resultados, obtenemos los Coeficientes Estacionales. Dado que la estacionalidad fue definida por S=12, tendremos 12 valores correspondientes a cada mes del año.

**Cuadro N° 2.8**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTACIONALES DEL PBI, 1991 - 2009**  
 (Año Base 1994=100,0)

**Factores estacionales**

Nombre de la serie:  
 ECONOMÍA TOTAL - PBI

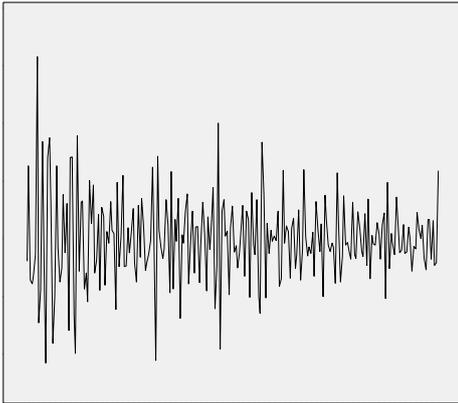
Período	Factor estacional (%)
1	96,7
2	95,6
3	99,9
4	103,1
5	108,9
6	104,3
7	101,9
8	97,3
9	95,2
10	98,1
11	97,6
12	101,5

**Pico estacional**

Fuente: INEI

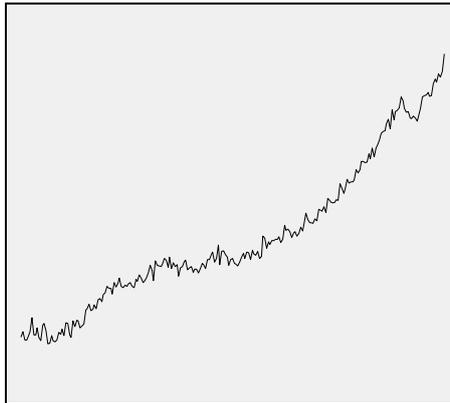
8. Podemos graficar las componentes por separado:

**Gráfico N° 2.6**  
PERÚ: RESIDUOS DEL PBI, 1991-2009  
(AÑO BASE 1994 = 100,0)



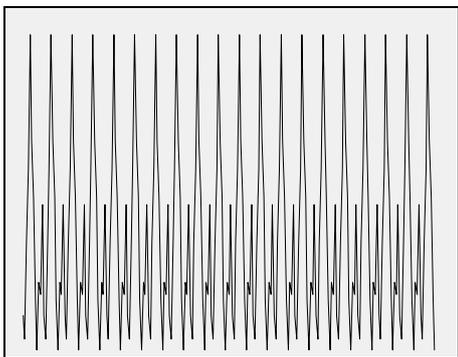
Fuente: INEI

**Gráfico N° 2.7**  
PERÚ: PBI DESESTACIONALIZADO, 1992-2009  
(AÑO BASE 1994 = 100,0)



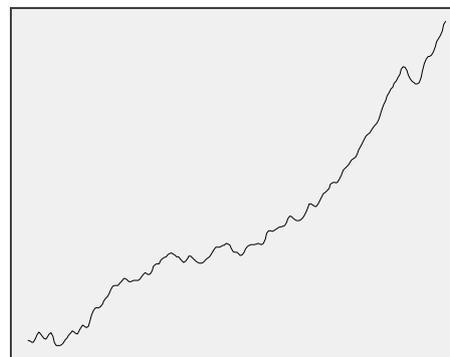
Fuente: INEI

**Gráfico N° 2.8**  
PERÚ: COEFICIENTES ESTACIONALES DEL PBI, 1991-2009  
(AÑO BASE 1994 = 100,0)



Fuente: INEI

**Gráfico N° 2.9**  
PERÚ: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA Y CICLO DEL PBI, 1991-2009  
(AÑO BASE 1994 = 100,0)



Fuente: INEI

### 2.3.1 Estimación de la Estacionalidad

Los coeficientes estacionales son la estimación de la componente estacional.

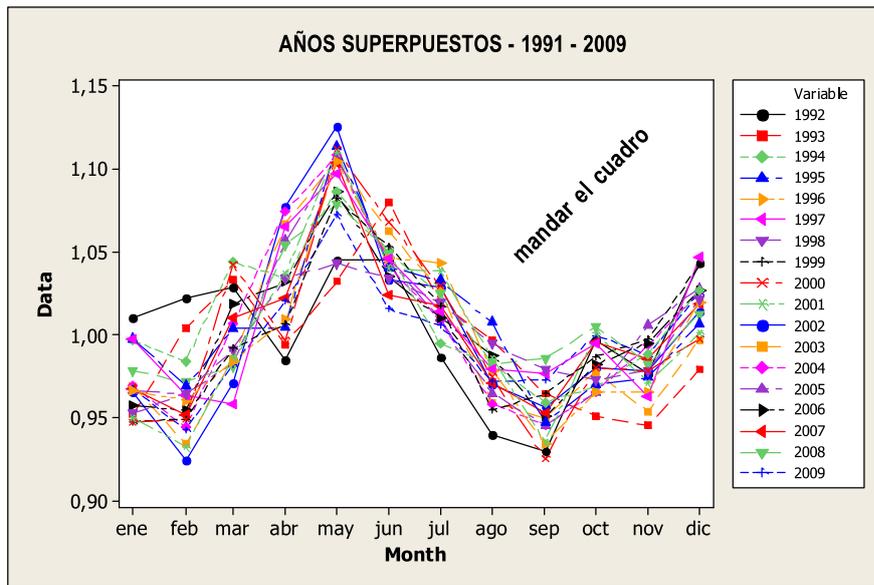
El cálculo de los coeficientes estacionales se hace según el tipo de modelo de la serie y el tipo de tendencia.

**Cuadro N° 2.9**  
Tipos de modelo

TIPO DE MODELO	ESTACIONALIDAD	VERIFICACIÓN
<b>Multiplicativo</b>	Porcentaje de Promedios Móviles	$\sum C_K = 1200 (\%) \quad \text{ó} \quad 12$
	Porcentaje de Tendencia	
<b>Aditivo</b>	Desviaciones	$\sum C_K = 0$

En el siguiente gráfico, se ha partido la serie por cada año y se han graficado de manera superpuestas. Se puede apreciar el comportamiento estacional que alcanza su máximo valor durante los meses de abril-mayo -junio, resultado que concuerda con los coeficientes estacionales.

**Gráfico N° 2.10**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTACIONALES DEL PBI TOTAL SUPERPUESTOS, 1992-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



Fuente: INEI

- i. **Cálculo de los coeficientes estacionales por el método de Porcentaje de Promedios Móviles.**

1. Filtrar la serie original usando promedios móviles.
2. Dividimos la serie original entre los promedios móviles y obtenemos las razones:

$$C'_{12j+k} : Y_{12j+k} / \hat{T}_{12j+k}$$

donde:

Y<sub>i</sub> = i-ésima observación de la serie

k = mes (1,2,...,12)

m = número de años

j = 0,.....,m-1

3. Los promedios de las razones  $C'_{12j+k}$  por cada mes, corresponden a los coeficientes estacionales  $C_k$

$$C_k = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{C'_{12j+k}}{m}$$

**Aplicación:**

Usando la serie PBI, obtenemos los coeficientes estacionales construyendo la tabla EXCEL, que a continuación se muestra:

**Cuadro N° 2.10**  
**PERÚ: DESCOMPOSICIÓN ESTACIONAL DEL PBI TOTAL, 1991 - 2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

B	C	D	E	F	G	H	I
Descomposición estacional							
Nombre de la serie: ECONOMIA TOTAL - PBI							
DATE_	Serie original	Serie de media móvil (filtrada)	Razón de la serie original sobre la serie de media móvil (%)	Factor estacional (%)	Serie corregida estacionalmente	Serie de tendencia-ciclo suavizada	Componente irregular (error)
JAN 1991	80,900			96,7	83,703	84,340	,992
FEB 1991	82,400			95,6	86,168	84,025	1,026
MAR 1991	82,100			99,9	82,204	83,393	,986
APR 1991	84,600			103,1	82,087	83,375	,985
MAY 1991	91,200			108,9	83,717	84,778	,987
JUN 1991	89,800			104,3	86,101	86,548	,995
JUL 1991	95,000	84,9750	111,8	101,9	93,271	87,728	1,063
AUG 1991	82,300	85,4417	96,3	97,3	84,562	87,086	,971
SEP 1991	80,600	85,7833	94,0	95,2	84,693	86,213	,982
OCT 1991	86,400	86,1750	100,3	98,1	88,062	85,181	1,034
NOV 1991	81,300	86,0333	94,5	97,6	83,318	84,888	,982
DEC 1991	83,100	85,7500	96,9	101,5	81,860	85,525	,957
JAN 1992	86,500	85,5917	101,1	96,7	89,497	87,039	1,028
FEB 1992	86,500	84,6333	102,2	95,6	90,455	87,386	1,035
MAR 1992	86,800	84,3667	102,9	99,9	86,909	85,845	1,012
APR 1992	82,900	84,1750	98,5	103,1	80,438	83,451	,964
MAY 1992	87,800	83,9917	104,5	108,9	80,596	82,235	,980
JUN 1992	87,900	84,1250	104,5	104,3	84,279	82,189	1,025
JUL 1992	83,500	84,6000	98,7	101,9	81,980	82,213	,997
AUG 1992	79,100	84,1917	94,0	97,3	81,274	82,493	,985
SEP 1992	78,300	84,2083	93,0	95,2	82,276	83,106	,990
OCT 1992	84,200	84,4833	99,7	98,1	85,820	84,520	1,015
NOV 1992	82,900	84,8583	97,7	97,6	84,958	85,352	,995
DEC 1992	88,800	85,1167	104,3	101,5	87,474	86,409	1,012

Fuente: INEI

- La serie filtrada (col D) por promedio móvil de amplitud 5. (1)
- Se calcula la razón de la serie original sobre la serie filtrada (col E).
- Obtenemos los promedios para cada mes por separado ( promedio de todos los eneros, promedio de todos los febreros, etc) (col F). Estos valores son los Coeficientes o Factores Estacionales, que al ser un patrón periódico, se repiten año a año en la serie.

*El cálculo de los coeficientes estacionales equivale a la estimación de la componente estacional.*  
*Si hemos elegido adecuadamente el tipo de modelo debe cumplirse:*  
 - *Suma de coeficientes estacionales es igual a 1200 (ó 12) si el modelo es multiplicativo.*  
 - *Suma de coeficientes estacionales es igual a 0, si el modelo es aditivo.*

**Cuadro N° 2.11**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTACIONALES DEL PBI TOTAL, 1991 - 2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

k	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	SUMA
Coeficientes Estacionales	96,7	95,6	99,9	103,1	108,9	104,3	101,9	97,3	95,2	98,1	97,6	101,5	1200,1

Fuente: INEI

Este mismo procedimiento puede seguirse cuando en lugar de aplicar promedios móviles se ha usado medianas móviles o suavización exponencial simple como filtros.

Análogamente podemos seguir el mismo procedimiento cuando previamente se tiene la estimación del componente tendencia, en cuyo caso el cálculo de los coeficientes estacionales se denomina "método de porcentaje de tendencia" (La tendencia estimada hace las veces de los promedios móviles y el procedimiento se repite conforme a lo detallado en i).

**ii. Cálculo de los coeficientes estacionales  $C_k$  por el método de Desviaciones.**

1. Obtenga los promedios para cada uno de los 12 meses, a lo largo de los años.
2. Calcule la media total de la serie
3. Reste el promedio de cada mes y la media total

$$\bar{y}_k = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y_{12j+k}}{m} \quad C_k = \bar{y}_k - \bar{y}$$

***¿Cómo desestacionalizar la serie?***

*Si a la serie original le eliminamos los factores estacionales, dividiendo, obtenemos la serie desestacionalizada.*

En la aplicación, podemos dividir la serie original (Col C) entre los coeficientes estacionales (Col F). La serie desestacionalizada se presenta en la Col G. Esta serie contiene Tendencia, Ciclo y Aleatoriedad.

***Tema de Discusión:***

*¿ Y si después de calcular los coeficientes estacionales la suma es diferente de 1200, cómo podemos hacer para representar la componente estacional?*

Antes de proceder a estimar la componente tendencia:

Podemos suavizar la serie desestacionalizada por alguno de los métodos de suavización a fin de tener una mejor representatividad de la tendencia - ciclo.

### 2.3.2 Estimación de la Tendencia:

Podemos estimar la tendencia de la siguiente forma:

- Estimación por modelos polinomiales
- Estimación por curvas de crecimiento

En ambos casos, partimos de la estimación de los parámetros del modelo mediante mínimos cuadrados (lineales y no lineales)

#### Estimación de los parámetros de modelos polinomiales:

Los modelos polinomiales son lineales en los parámetros, en consecuencia podemos aplicar de manera directa el método de mínimos cuadrados, el cual será desarrollado en esta sección.

**Principio:** Hallar la ecuación (los valores de los parámetros) del polinomio de grado  $q$  ( $q=0,1,2,\dots$ ) que pasa más cerca de todos los puntos en el sentido que la suma de cuadrados del error (SCE) definido como:

$SCE = \sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2$  sea mínima en comparación a la SCE de cualquier otro polinomio.

#### Ejemplo:

Sea el modelo constante (polinomio de grado cero)

$$Y_t = a + e_t, \text{ entonces } \hat{Y}_t = \hat{a}$$

$$\text{Luego } = \sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2 = \sum (Y_t - \hat{a})^2,$$

derivando e igualando a cero:

$$-2 \sum (Y_t - \hat{a}) = 0,$$

$$\text{entonces } \sum Y_t = n \hat{a} \rightarrow \hat{a} = \bar{Y}_t$$

**Otros casos:** tendencia en forma lineal (polinomio de 1º grado), tendencia en forma parabólica (polinomio de 2º grado)

Podemos sin embargo, hacer un tratamiento matricial que engloba a todos los polinomios (esto también es válido para modelos lineales en varias variables o modelos de regresión múltiple).

$$Y = X\beta + e \rightarrow \hat{Y} = X\hat{\beta}$$

$$SCE = (y - \hat{Y})' (y - \hat{Y}) =$$

$$(y - X\hat{\beta})' (y - X\hat{\beta}) =$$

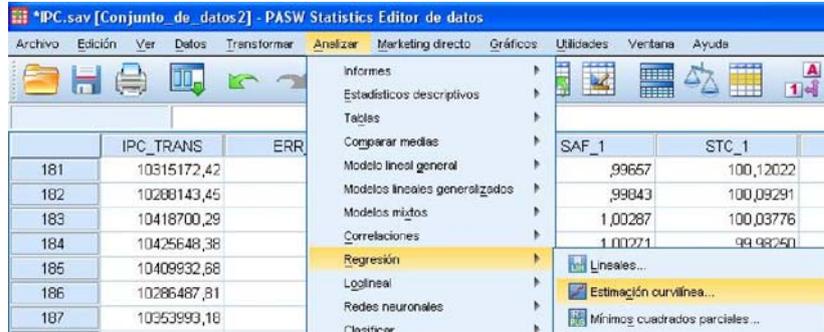
$$y'y - y'x\hat{\beta} - \hat{\beta}'x'y + \hat{\beta}'x'x\hat{\beta}$$

Derivando con respecto a  $\hat{\beta}$  e igualando a cero

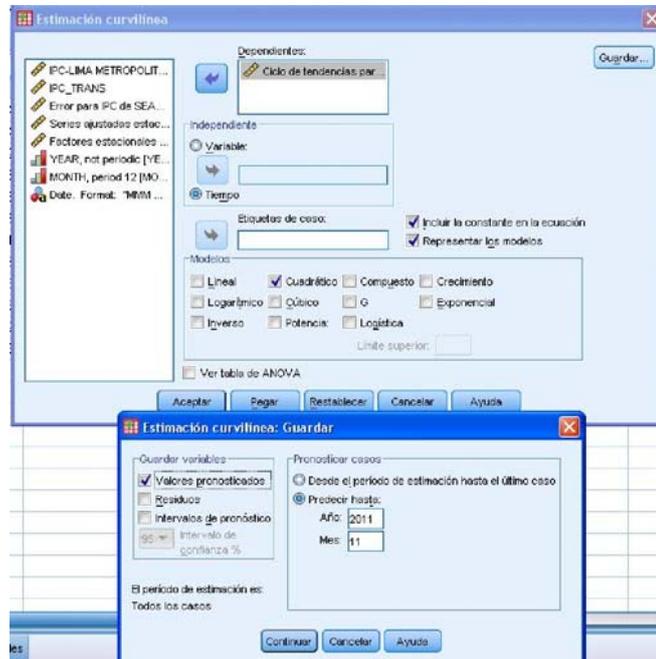
$$\text{se obtiene } \hat{\beta} = [x'x]^{-1} x'y$$

**Ejercicio:** Ajustar a un polinomio de segundo grado la tendencia de la serie del IPC.

1. Usando el filtro de la serie IPC, obtenido por descomposición. Seguimos la secuencia: NALIZAR/ REGRESIÓN/ ESTIMACIÓN CURVILÍNEA



2. Aparece la ventana de ESTIMACIÓN CURVILÍNEA: Ingresamos en Dependiente, la componente tendencia de la variable IPC "CICLO-TENDENCIA".
3. Activamos "tiempo" en el recuadro de "Independiente" y seleccionamos el tipo de ajuste que queremos aplicar. Hemos seleccionado "cuadrático"
4. Entramos a "Guardar" y marcamos: Valores pronosticados, Guardar Variables .
5. En Pronosticar casos, indicamos hasta dónde se quieren obtener los pronósticos: 2011- 11 (noviembre del 2011).



El programa proporciona el  $R^2$  (coeficiente de determinación), la tabla de descomposición de la variabilidad, en la cual se muestra el Cuadrado

Medio del Error (CME) y los coeficientes del polinomio estimado, el resto es información que no tomaremos en cuenta.

**Cuadro N° 2.12**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA DEL IPC, 1994 - 2009**  
**(Año Base 2009=100,0)**

**Cuadrático**

**Resumen del modelo**

R	R cuadrado	R cuadrado corregido	Error típico de la estimación
,984	,967	,967	2,399

**ANOVA**

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática
Regresión	32247,108	2	16123,554
Residual	1087,728	189	5,755
Total	33334,836	191	

**Coefficientes**

	Coefficientes no estandarizados	
	B	Error típico
Secuencia de casos	,393	,013
Secuencia de casos ** 2	-,001	,000
(Constante)	52,473	,525

Fuente: INEI

**INTERPRETACIÓN**

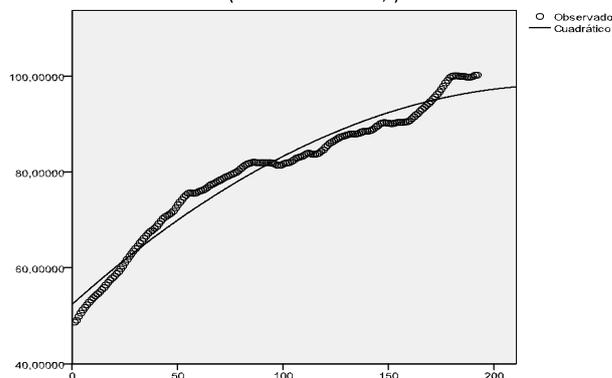
R<sup>2</sup>: El modelo cuadrático explica el 96,7% de la variabilidad total de la serie.

CME: El valor de comparación para el residuo es de 5,755. Este valor corresponde al área de variabilidad no explicada por el modelo, penalizando la cantidad de parámetros.

El modelo estimado es:

$$\hat{Y}_t = 52.473 + 0.393 t - 0.001 t^2$$

**Gráfico N° 2.11**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA DEL IPC, 1994 - 2009**  
**(AÑO BASE 2009 = 100,0)**



Los valores pronosticados para la tendencia son:

**Cuadro N° 2.13**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA DEL IPC, 1994 - 2009 Y PREVISIÓN 2010 - 2011**  
**(Año Base 2009=100,0)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
<b>2010</b>	96,9	96,9	97,0	97,1	97,1	97,2	97,2	97,3	97,4	97,4	97,5	97,5
<b>2011</b>	97,6	97,6	97,6	97,7	97,7	97,8	97,8	97,8	97,9	97,9	97,9	98,0

Fuente: INEI

6. Si obtenemos los coeficientes estacionales para la serie IPC y los integramos con la tendencia estimada tendremos los pronósticos desde Enero 2010- Dic 2011. Los valores pronosticados para la tendencia son:

**Cuadro N° 2.14**  
**LIMA METROPOLITANA: COEFICIENTES ESTACIONALES DEL IPC, 1994 - 2009**  
**(Año Base 2009=100,0)**

COEFICIENTES ESTACIONALES											
ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
0,9962	0,9987	1,0032	1,0026	1,0024	1,0006	1,0019	1,0007	1,0009	0,9991	0,9973	0,9963

Fuente: INEI

**Cuadro N° 2.15**  
**LIMA METROPOLITANA: PRONÓSTICOS DEL IPC, 2010 - 2011**  
**(Año Base 2009=100,0)**

PRONÓSTICOS PARA LA SERIE IPC ENERO 2010 - DIC 2011												
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
2010	96,5	96,8	97,3	97,3	97,4	97,3	97,4	97,4	97,4	97,3	97,2	97,1
2011	97,2	97,5	98,0	97,9	98,0	97,8	98,0	97,9	98,0	97,8	97,7	97,6

Fuente: INEI

*Eliminando de la serie original, la tendencia-ciclo y la estacionalidad, obtenemos la componente irregular.*

Si queremos hacer estimación por intervalos o dójimas de hipótesis acerca de los parámetros del modelo polinomial tenemos que preocuparnos por distribución de  $\hat{\beta}$ :

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \rightarrow Y \sim N(X'\beta, \sigma^2 I)$$

$$\text{como } \hat{\beta} = [X'X]^{-1} X'Y$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta \text{ (es insesgado)}$$

$$\text{y } \text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 [X'X]^{-1}$$

Además hay un teorema que dice:

$$\text{Si } X \sim N(\mu, \sigma^2 \Sigma)$$

$$\text{entonces } c'X \sim N(c'\mu, c'\Sigma c)$$

Luego  $\hat{\beta}_i \sim N(\beta_i, \sigma^2 a_{ii})$  donde  $a_{ii}$  es el i-ésimo elemento de la diagonal de  $[X'X]^{-1}$

$$\rightarrow \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{a_{ii}}} \sim N(0,1)$$

A partir de allí, podríamos construir intervalos de confianza y hacer dójimas pero  $\sigma^2$  es desconocido y tenemos que estimarlo.

Para ello nos puede ayudar a examinar la suma de cuadrados del error, de donde analizándola como una forma cuadrática idempotente y expresándola como:

$$\frac{SCE}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2,$$

$$\text{luego } E\left(\frac{SCE}{\sigma^2}\right) = n-p \rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{SCE}{n-p}$$

$\frac{\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{a_{ii}}}}{\sqrt{\frac{SCE}{\sigma^2(n-p)}}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\frac{\hat{\sigma}}{\sigma}}$  esta expresión es el cociente de una variable con distribución  $N(0,1)$  entre la raíz de una chi-cuadrado entre sus grados de libertad y por tanto es una variable con distribución t-student.

$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{a_{ii}}} \sim t_{n-p}$  y ahora podemos estimar los parámetros por intervalos de confianza dado  $\alpha$

$$P(-t_{\alpha/2, n-p} \leq \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sigma \sqrt{a_{ii}}} \leq t_{\alpha/2, n-p}) = 1 - \alpha$$

Luego el intervalo tiene la forma  $\hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2} \sigma \sqrt{a_{ii}}$

También podemos hacer dójimas acerca de los parámetros.

Las hipótesis serán de la forma:  $H_0: \beta_k = 0$  y la rechazaremos cuando la estadística de prueba:

$$\frac{\hat{\beta}_i}{\sigma \sqrt{a_{ii}}} > t_{n-p, \alpha} \text{ (valor crítico)}$$

Se recomienda plantearse el polinomio del grado más alto de acuerdo con el gráfico de la tendencia de la serie y luego docimar  $H_0: \beta_k = 0$ .

En caso que no se rechace, docimar  $H_0: \beta_{k-1} = 0$  y así se irá bajando hasta quedarnos con el polinomio del menor grado posible. Mientras menor sea el grado, más fácil la interpretación.

**Ejercicio:** Docimar si necesitamos una parábola o es suficiente una recta para estimar la tendencia del IPC.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 \text{ ---- parábola}$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t \text{ ----- recta}$$

Recordar: El ajuste de la tendencia a un polinomio de grado mayor a 3 hace sospechar que en realidad se está observando la presencia de ciclos.

$$H_0: \beta_3 = 0 \quad H_1: \beta_3 \neq 0 \quad \text{Sea } b_3 = \hat{\beta}_3 \quad \alpha = 0.05$$

$$0.05 = P(H_1 / H_0) = P(H_1 / \beta_3 = 0) =$$

$$P\left( \frac{b_3 - \beta_3}{\hat{\sigma}_{b_3}} = t / \beta_3 = 0 \right)$$

$$\text{Tal que } t \sim t_{n-3} \quad \hat{\sigma}_{b_3} = \text{Var}(b_3)$$

$$t = |-13.406| \text{ que se distribuye como una } t_{193, 0.975} = 1.97 \text{ para } n=196 \text{ y } 1-\alpha/2 = 0.975$$

Se rechaza la hipótesis nula, en consecuencia  $\beta_3 \neq 0$  y por lo tanto, el polinomio de segundo grado es un buen ajuste para la tendencia de la serie IPC.

## 2.4 Estimación de la Tendencia por Curvas de Crecimiento y Crecimiento Limitado

Cuando la tendencia de la serie no presenta un comportamiento polinomial, podemos ajustarla a una de las curvas de crecimiento o de crecimiento limitado.

**Cuadro N° 2.16**  
**Tipos de curva**

Tipo de Curva	Ecuación de estimación	Características
Curva exponencial	$Y_t = a \cdot b^t$	<b>Curva de crecimiento:</b> Tiene dos parámetros a y b. Si se toma logaritmo se convierte en la ecuación de la recta: $\text{Log } Y_t = \log a + t \log b$
Curva exponencial modificada	$Y_t = a + b \cdot c^t$	<b>Curvas de crecimiento limitado:</b> Son curvas relacionadas con el crecimiento exponencial, pero a diferencia de la curva exponencial su crecimiento es asintótico. Es decir, luego de un tiempo, la variable tiende a estabilizarse en un cierto valor.
Curva Gompertz	$Y_t = a \cdot b^{c^t}$	
Curva Logística	$Y_t = \frac{1}{1 + a \cdot e^{-\alpha t}}$ $Y_t = \frac{\alpha_1}{1 + e^{\alpha_2 + \alpha_3 t}}$	Es frecuente su uso en el crecimiento de poblaciones humanas a las cuales en determinado momento se les aplica una política de control de natalidad o para poblaciones humanas en ambientes limitados.

Para las curvas de crecimiento limitado, se trata de ecuaciones no lineales en los parámetros y las cuales no se pueden convertir a lineales mediante la aplicación de logaritmos, por lo cual no se puede aplicar directamente el método de mínimos cuadrados. Los programas como el PASW y otros traen incorporados la estimación mediante aproximación mínimo cuadrática para estimación no lineal. Este método requiere de valores iniciales para empezar a aplicarlos.

Logística: Cuando la tendencia se ajusta a una curva logística, el cociente de las primeras diferencias de los recíprocos de los valores sobre las segundas es constante:

$$\frac{\frac{1}{Y_{t+2}} - \frac{1}{Y_{t+1}}}{\frac{1}{Y_{t+1}} - \frac{1}{Y_t}} = k$$

Para la modelización por curvas de crecimiento y de crecimiento limitado usaremos el programa PASW.

**Identificación del Tipo de Curva de Crecimiento:**

Exponencial: Cuando la tendencia se ajusta a una curva exponencial, la razón entre términos sucesivos es constante.

$$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = k$$

Exponencial Modificada: Cuando la tendencia se ajusta a una curva exponencial modificada, la razón entre las diferencias sucesivas es constante:

$$\frac{Y_{t-2} - Y_{t-1}}{Y_{t-1} - Y_t} = k$$

**Aplicación:**

Ajustar la tendencia de la serie Volumen de Producción Eléctrica a una de las curvas de crecimiento o de crecimiento limitado.

A partir del comportamiento observado en la serie en la Plantilla N°1, se sospecha que la tendencia se ajusta a una curva de crecimiento exponencial. Se verifica esta sospecha haciendo la razón entre valores sucesivos de la tendencia, obteniéndose como resultado una constante (k=1).

**Cuadro N° 2.17**  
**PERÚ: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, 1990 - 2009**  
**(Giga wattios - hora)**

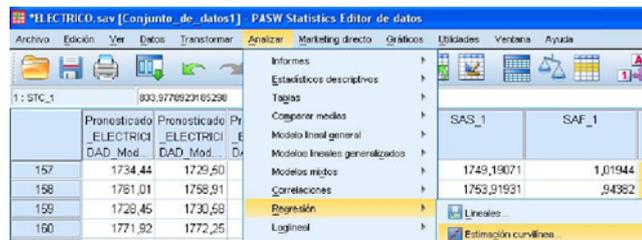
<b>Tt</b>	833,98	825,2	807,8	794,2	791,8	788,7	779,9	764,1	758	776,5	807,3	831,6	838,8	836,8	839,7
<b>Tt+1/Tt</b>		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fuente: INEI

Procedemos al ajuste a una exponencial.

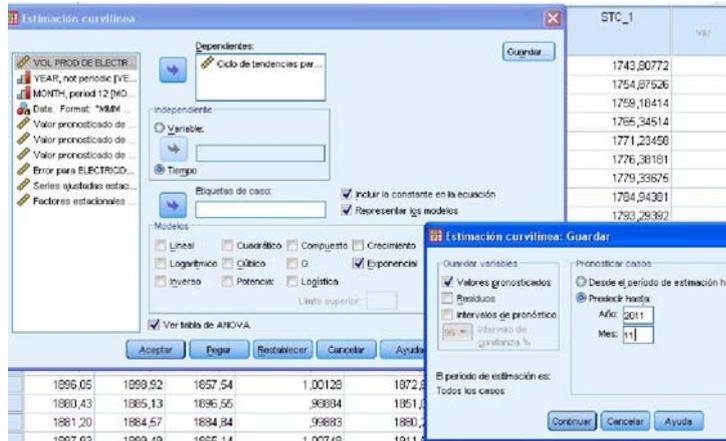
Elegimos en el menú: ANALIZAR/ REGRESIÓN/ ESTIMACIÓN CURVILÍNEA

Previamente, hemos filtrado la serie para quedarnos solo con las componentes a largo plazo, en este caso: Tendencia.



En la ventana de "Estimación Curvilínea" ingresar en "Dependiente" la variable Tendencia. Activar en "independiente" el Tiempo. Marcar "incluir

constante" y "representar los modelos". Marcar "Ver tabla de ANOVA"



En la parte de "Modelos", especificar el tipo de modelo; en este caso activamos "exponencial" (pueden activarse varios modelos a la vez)

Ingresa a "Guardar" y marcar "guardar valores pronosticados". Indicar en Pronosticar casos, el año (2011) y mes (11) hasta donde se quieren los pronósticos.

**Cuadro Nº 2.18**  
**PERÚ: RESUMEN DEL MODELO DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, 1990 - 2009**  
**(Giga wattios - hora)**

R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típico de la estimación
0,992	0,985	0,985	0,046

Fuente: INEI

El modelo explica un 98,5% respecto a la variabilidad total de la tendencia.

**Cuadro Nº 2.19**  
**PERÚ: ANOVA DEL MODELO DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, 1990 - 2009**  
**(Giga wattios - hora)**

ANOVA					
	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig
Regresión	32,407	1	32,407	15413,570	0,000
Residual	0,500	238	0,002		
Total	32,907	239			

Fuente: INEI

El CME es 0,002, valor bastante pequeño, comparable con otras estimaciones.

**Cuadro Nº 2.20**  
**PERÚ: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, 1990 - 2009**  
**(Giga wattios - hora)**

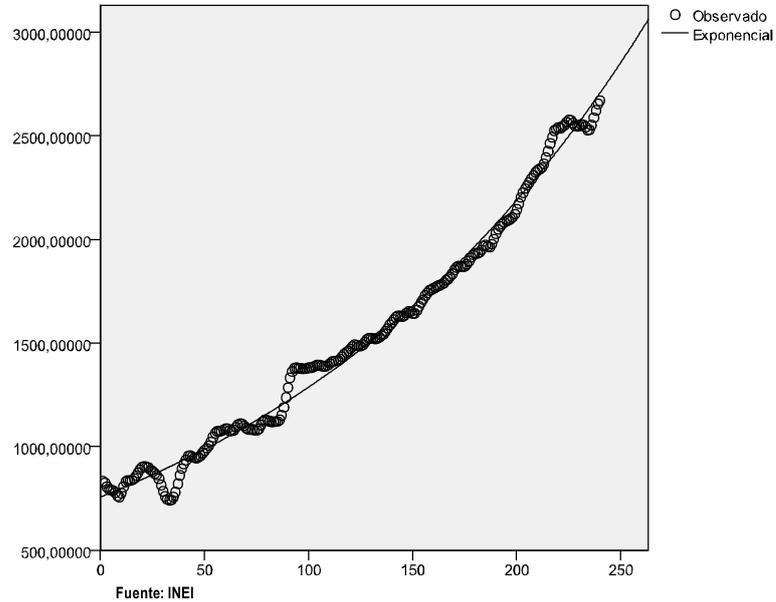
	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados		t	Sig
	B	Error típico	Beta			
Secuencia de casos (Constante)	0,005	0,000	0,992		124,151	0,000
	758,457	4,504			168,403	0,000

La variable dependiente es ln(Ciclo de tendencias para ELECTRICIDAD de SEASON, MOD\_1, MUL EQU 12).

Fuente: INEI

Se obtienen los parámetros estimados para el modelo exponencial:  $Y_t = 758.457 * 0.005^t$

Gráfico N° 2.12  
PERÚ: VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, ORIGINAL Y ESTIMADA, 1990 -2009  
(GIGAWATTIOS -HORA)



La gráfica muestra un buen ajuste entre los valores observados de tendencia y la estimación por curva de crecimiento exponencial.

- " Permite comparar y decidir entre dos o más técnicas empleadas.
- " Mide qué tan útil es una técnica en particular

### 2.5 Comprobación de la Eficacia de la Estimación:

Antes de pronosticar, debemos evaluar el modelo que se ha trabajado con cualquiera de los métodos desarrollados. Para ello, usamos los residuos ( $e_t$ ), que se obtiene mediante la diferencia entre la serie original y la serie estimada.

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Existen básicamente dos formas de hacer esta evaluación; la primera corresponde a un recurso gráfico y la segunda sobre la base de estadísticas calculadas a partir de los residuos.

**Estadísticas de Comprobación:** Detallaremos algunas de las técnicas para comprobación de la precisión de la estimación, cuya utilidad específica es:

#### a. MEAN ABSOLUTE DEVIATION (MAD)

##### ¿Qué es el MAD?

Es la desviación absoluta media, mide la precisión del pronóstico. Consiste en promediar los valores absolutos de los errores.

##### ¿Cuándo se recomienda su uso?

Se utiliza cuando se quiere medir los errores de pronóstico en las mismas unidades de la serie original.

$$MAD = \frac{1}{n} \sum |Y_t - \hat{Y}_t|$$

#### b. MEAN SQUARED ERROR (MSE)

##### ¿Qué es el MSE?

Es el promedio del cociente del error entre el valor real.

### ¿Cuándo se recomienda su uso?

Al elevar al cuadrado los errores, permite penalizar los errores grandes, en consecuencia se recomienda usarlo cuando se quiera enfatizar especialmente en las máximas diferencias entre los valores observados y los estimados.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum (Y_t - \hat{Y}_t)^2$$

### c. MEAN ABSOLUTE PERCENT ERROR (MAPE)

#### ¿Qué es el MSE?

Es el promedio del cociente del error absoluto entre el valor real.

### ¿Cuándo se recomienda su uso?

Cuando se quiere calcular los errores en términos porcentuales.

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \frac{|Y_t - \hat{Y}_t|}{Y_t}$$

### d. MEAN PERCENT ERROR (MPE)

#### ¿Qué es el MSE?

Es el promedio del cociente del error entre el valor real.

### ¿Cuándo se recomienda su uso?

Cuando se quiere enfatizar en la comprobación y medición de sesgos en los residuos

$$MPE = \frac{1}{n} \sum \frac{(Y_t - \hat{Y}_t)}{Y_t}$$

#### **RECUERDE:**

*Las técnicas mencionadas son especialmente útiles cuando se hacen varios ajustes y se quiere establecer comparaciones a fin de elegir el mejor.*

### Validación Gráfica

Aún cuando la validación gráfica puede ser calificada de intuitiva y exploratoria, es innegable su facilidad para ser comprendida por todos, así como los buenos resultados que proporciona. Podemos mencionar las siguientes:

### Gráfico de la serie original vs. Estimación (incluyendo los pronósticos)

Se espera que en un gráfico superpuesto de la serie estimada siga el comportamiento de la serie original y que de la misma manera, los pronósticos continúen de manera natural el comportamiento de los últimos datos. Puede tolerarse diferencias con los registros más antiguos de la serie, sin pérdida de importancia en la estimación ya que en series de tiempo los datos más antiguos son los de menor interés.

### Gráfico de las autocorrelaciones de los residuos

Esperamos que las autocorrelaciones de los residuos sean próximos a cero y sigan un comportamiento aleatorio, es decir, que no presenten un patrón de comportamiento determinado.

Más adelante, podremos especificar con mayor detalle el uso de las autocorrelaciones residuales.

### Gráfico del periodograma de los residuos.

Dado que esperamos que los residuos no tengan ningún patrón fijo y que no guarde ningún componente en particular (tendencia-ciclo-estacionalidad), el periodograma de los residuos provenientes de un buen modelo no debe presentar ninguna intensidad en particular resaltante respecto a las otras; preferiblemente debería mostrar el comportamiento de una recta horizontal.

La prueba gráfica por medio del periodograma es bastante potente por cuanto busca la intensidad que caracteriza a cualquier componente de la serie.

### Gráfico de normalidad de los residuos.

Con la finalidad de comprobar el cumplimiento de la normalidad de los residuales podemos usar este gráfico que se obtiene mediante estadísticas de orden. Usando los cuantiles de la distribución normal se trata de mostrar una serie de puntos que al provenir de una distribución, se ajustan a la recta diagonal que presenta el gráfico.

## 2.6 Aplicación de Modelización a Series Económicas:

### SERIE I: ANÁLISIS Y MODELIZACIÓN DE LA SERIE: POBLACIÓN ECONÓMICAMENTE ACTIVA(PEA) - Lima Metropolitana. 2002- 2009

#### A. INTRODUCCIÓN



La Población Económicamente Activa (PEA) es una expresión creada para describir, dentro de cierto universo de población delimitado, al subconjunto de personas que son capaces de trabajar y desean hacerlo. En la última década la PEA experimentó un crecimiento de aproximadamente 19,0%.

Procederemos a analizar la serie PEA de registro mensual, correspondiente a 8 años comprendidos entre Enero del 2002 hasta Diciembre de 2009. Los pronósticos se harán para el año 2010-2011. Como contraste, usaremos el dato proporcionado

por el Ministerio de Trabajo que de manera preliminar estimó que Población Económicamente Activa (PEA) en Lima Metropolitana para comienzos del 2010 asciende a 4 millones 390 mil 859 personas.

#### B. ANÁLISIS PRELIMINAR DE LOS DATOS

Antes de iniciar el análisis exploratorio de los datos, observamos si la base de datos presenta datos faltantes.

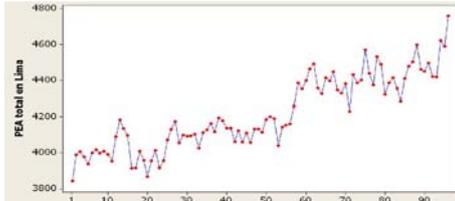
**Cuadro N° 2.21**  
**LIMA METROPOLITANA: POBLACIÓN ECONÓMICAMENTE ACTIVA (PEA), 2002-2009**

MES/AÑO	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ENERO	3844	4183	4073	4116	4114	4464	4386	4410
FEBRERO	3989	4134	4130	4195	4185	4491	4401	4478
MARZO	4006	4096	4175	4179	4200	4357	4570	4503
ABRIL	3978	3915	4056	4136	4190	4326	4440	4598
MAYO	3938	3916	4099	4137	4039	4415	4375	4462
JUNIO	4001	4009	4092	4062	4143	4397	4532	4450
JULIO	4017	3959	4095	4123	4155	4447	4490	4497
AGOSTO	3998	3868	4104	4059	4161	4346	4322	4421
SEPTIEMBRE	4008	3955	4026	4111	4257	4329	4387	4420
OCTUBRE	3991	4013	4113	4058	4385	4382	4415	4622
NOVIEMBRE	3954	3916	4127	4133	4353	4229	4356	4589
DICIEMBRE	4091	3957	4163	4132	4399	4433	4282	4758

(Dato real \*1000)  
Fuente: INEI - EPE

Procederemos a realizar un gráfico de la serie original con la finalidad de visualizar las cuatro componentes y aproximarnos al tipo de modelo.

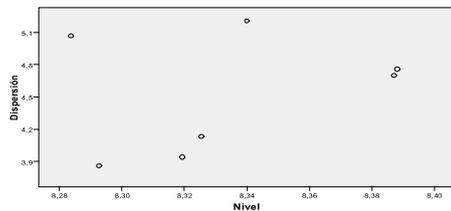
**Gráfico N° 2.13**  
LIMA METROPOLITANA: POBLACIÓN ECONÓMICAMENTE ACTIVA, 2002-2009



Fuente: INEI - EPE

En el Gráfico N° 2.13 podemos visualizar una tendencia lineal creciente, con respecto a la estacionalidad, ésta no puede ser visualizada con claridad por lo tanto puntualizaremos que la serie presente una estacionalidad no determinística. Aparentemente, la serie presenta variabilidad asociada con el nivel, es decir, corresponde a un modelo multiplicativo. Veremos el gráfico de dispersión vs. Nivel para confirmar esta primera apreciación.

**Gráfico N° 2.14**  
LIMA METROPOLITANA: NIVEL VS DISPERSIÓN DE LA PEA, 2002-2009



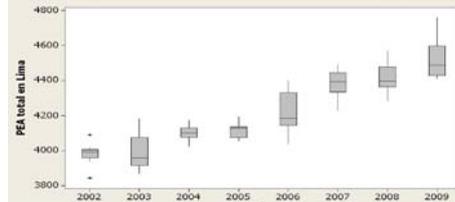
\* Gráfico de LN de dispersión por LN de nivel  
inclinación = 3.691 Potencia para transformación = 2.691

Fuente: INEI - EPE

En el Gráfico N° 2.14 se muestra que hay una asociación entre los puntos, lo que nos estaría confirmando que esta corresponde a un modelo del tipo multiplicativo como inicialmente se sospechaba.

Con el fin de identificar el comportamiento a largo plazo de la PEA, presentamos el gráfico de cajas Simples y para el comportamiento a corto plazo, el gráfico de cajas agregadas. Además ambos gráficos permiten identificar la presencia de datos discordantes si los hubiera.

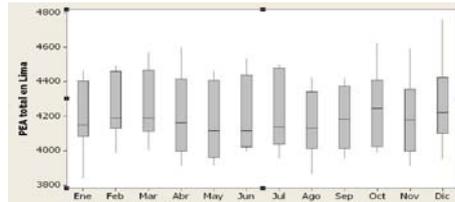
**Gráfico N° 2.15**  
LIMA METROPOLITANA: PEA POR AÑO, 2002-2009



Fuente: INEI - EPE

Con las cajas simples por años, se corrobora la tendencia lineal creciente, también se visualizan dos datos discordantes para el año 2002. Sin embargo, su presencia no debe afectar la modelización por presentarse al comienzo de la serie. Observamos que los años con mayor estabilidad (menos variable) son 2004 y 2005. Mientras que los más variables son 2003, 2006 y 2009.

**Gráfico N° 2.16**  
LIMA METROPOLITANA: PEA POR MES, 2002-2009

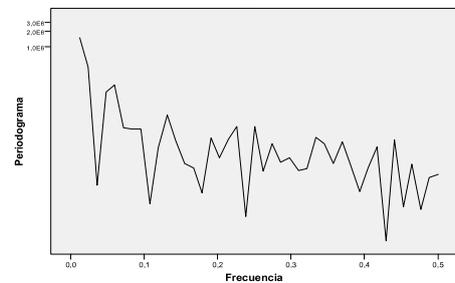


Fuente: INEI - EPE

La disposición de las cajas, una a continuación de la otra, sugiere estacionalidad no determinística. Se puede concluir que la variabilidad entre los meses es heterogénea; en consecuencia, este es un primer indicio de falta de estabilidad en variabilidad.

El análisis del gráfico del periodograma nos permitirá tener más información referente a la estacionalidad, ciclos y aleatoriedad.

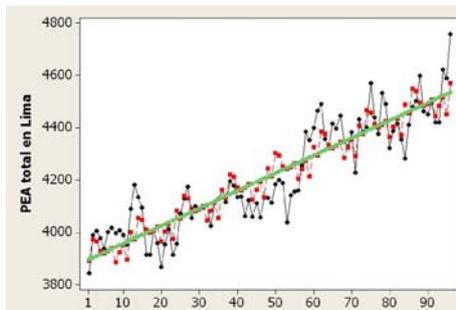
**Gráfico N° 2.17**  
LIMA METROPOLITANA: PERIODOGRAMA DE LA PEA POR FRECUENCIA, 2002-2009



Fuente: INEI - EPE

La intensidad máxima se presenta muy próxima a la frecuencia de inicio (0,0); este comportamiento es típico cuando existe tendencia determinística. En consecuencia, el periodograma nos revela que la tendencia es la componente más importante de la serie PEA, seguida por la estacionalidad. La segunda intensidad más alta se presenta en la frecuencia próxima a 0,05, que aparentemente corresponde a un ciclo de amplitud 24 meses. Sin embargo, ciclos de amplitud tan corta no son consistentes y pueden ser tomados como reflejo de una estacionalidad oculta por la presencia de tendencia.

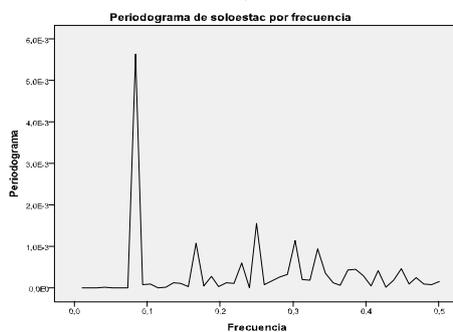
**Gráfico N° 2.18**  
LIMA METROPOLITANA: DESCOMPOSICIÓN DE LA SERIE PEA, 2002-2009



Fuente: INEI - EPE

Observamos la descomposición de la PEA total en Lima para un modelo multiplicativo, la línea verde hace referencia a la tendencia lineal creciente, la línea roja hace referencia a los comportamientos repetitivos de estacionalidad y aleatoriedad, y con línea negra los datos originales. Construyendo el periodograma sólo para la PEA, sin la componente tendencia, obtenemos:

**Gráfico N° 2.19**  
LIMA METROPOLITANA: PERIODOGRAMA DE LA PEA POR FRECUENCIA, 2002-2009



Fuente: INEI - EPE

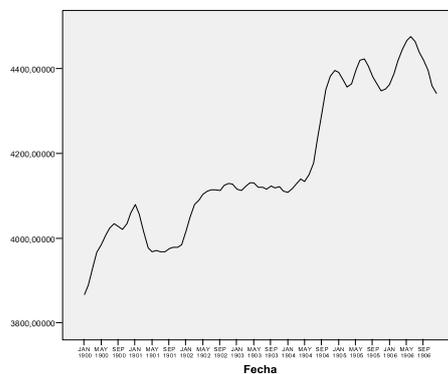
Periodograma		
Frecuencia	Periodo	Periodograma
,00000		,000
,01042	96,00000	,000
,02083	48,00000	,000
,03125	32,00000	,000
,04167	24,00000	,000
,05208	19,20000	,000
,06250	16,00000	,000
,07292	13,71429	,000
<b>,08333</b>	<b>12,00000</b>	<b>,006</b>
,09375	10,66667	,000
,10417	9,60000	,000
,11458	8,72727	,000
,12500	8,00000	,000
,13542	7,38462	,000
,14583	6,85714	,000
,15625	6,40000	,000
<b>,16667</b>	<b>6,00000</b>	<b>,001</b>
,17708	5,64706	,000
,18750	5,33333	,000
,19792	5,05263	,000

Ahora sí se hace evidente la estacionalidad que presenta la serie PEA. Podemos concluir que PEA es una serie de tipo multiplicativa, con tendencia creciente y estacionalidad de orden 12.

**C. ESTIMACIÓN DE LOS COMPONENTES:**

La descomposición de la serie mediante filtrado y asumiendo un comportamiento multiplicativo, nos ha permitido tener por separado la Tendencia y la Estacionalidad. Ahora es posible modelarlas por separado. De esta manera, el siguiente gráfico representa solo la tendencia la cual probablemente se puede ajustar a un polinomio de segundo grado.

**Gráfico N° 2.20**  
LIMA METROPOLITANA: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA DE LA PEA



Fuente: INEI - EPE

Haciendo las d6cimas para los par6metros polinomio de grado mayor al supuesto grado del posible modelo, partimos de un 3. (Nivel de significancia 5%)

**Cuadro N° 2.22**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTIMACI3N DE LA TENDENCIA DE LA PEA, 2002-2009**

Resultados para Prueba secuencial de par6metros	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig
	B	Error t6pico	Beta		
Par6metro potencia 1°	0,756	2,237	0,106	0,338	0,736
Par6metro potencia 2°	0,103	0,053	1,446	1,924	0,057
Par6metro potencia 3ª	0,000	0,000	-0,610	-1,303	0,196
(Constante)	3966,247	25,181		157,508	0,000

Fuente: INEI - EPE

El par6metro de 3° grado es no se ajusta a un polinomio c6bico. significativo; por lo tanto, la tendencia no

**Cuadro N° 2.23**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTIMACI3N DE LA TENDENCIA DE LA PEA, 2002-2009**

Resultados para Prueba secuencial de par6metros	Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig
	B	Error t6pico	Beta		
Par6metro potencia 1°	3,434	0,885	0,482	3,878	0,000
Par6metro potencia 2°	0,034	0,009	0,480	3,860	0,000
(Constante)	3944,044	18,607		211,962	0,000

Fuente: INEI - EPE

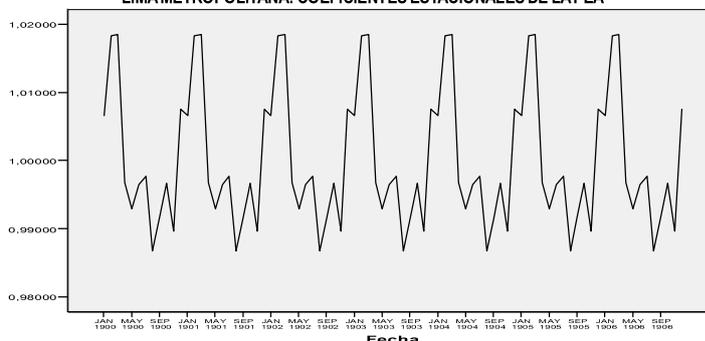
El par6metro de 2° grado es significativamente de la PEA se ajusta a un polinomio de segundo diferente de cero, en consecuencia la tendencia grado.

$$\hat{T}_t = 3944.044 + 3.434t + 0.034t^2$$

**D. ESTIMACI3N DE COEFICIENTES ESTACIONALES:**

El siguiente es un gr6fico de secuencias de los coeficientes estacionales de la PEA.

**Gr6fico N° 2.21**  
**LIMA METROPOLITANA: COEFICIENTES ESTACIONALES DE LA PEA**



Fuente: INEI - EPE

Cuyos coeficientes estacionales (factores estacionales) han sido obtenidos automáticamente al aplicar la descomposición (manualmente puede ser verificado por Porcentaje de tendencia) y se muestran a continuación:

**Cuadro N° 2.24**  
**LIMA METROPOLITANA: COEFICIENTES ESTACIONALES DE LA PEA, 2002-2009**

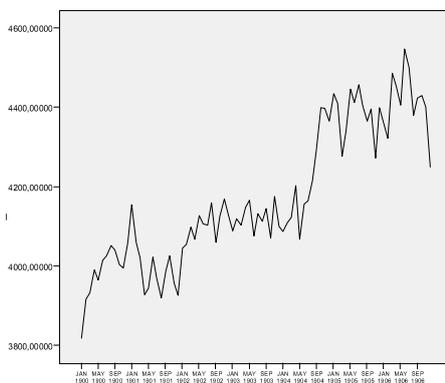
Período	Factor estacional (%)
1	100.7
2	101.8
3	101.9
4	99.7
5	99.3
6	99.7
7	99.8
8	98.7
9	99.2
10	99.7
11	99.0
12	100.8

Fuente: INEI - EPE

**E. ESTIMACIÓN DE LA SERIE**

Para un modelo multiplicativo, con tendencia polinómica de segundo grado y estacionalidad multiplicativa, se estima por métodos de descomposición el comportamiento de la PEA.

**Gráfico N° 2.22**  
**LIMAMETROPOLITANA: PEA, ORIGINAL, ESTIMADA Y PRONOSTICADA**



Fuente: INEI - EPE

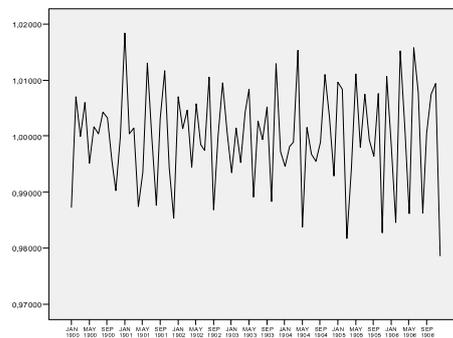
**Cuadro N° 2.25**  
**LIMA METROPOLITANA: ESTIMACIÓN DE LA TENDENCIA DE LA PEA, 2010**

ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
4622	4690	4702	4626	4614	4633	4661	4604	4647	4681	4648	4730

Fuente: INEI - EPE

**F. ANÁLISIS DE LOS RESIDUOS**

**Gráfico N° 2.23**  
**LIMA METROPOLITANA: RESIDUOS DE LA PEA, 2002-2009**

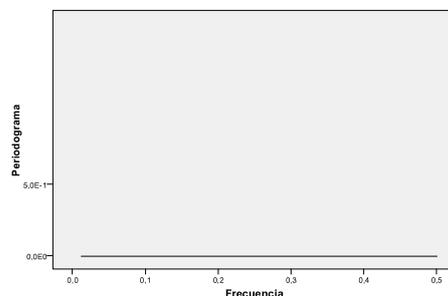


Fuente: INEI - EPE

Después de la estimación del modelo, se espera que los residuos tengan un comportamiento aleatorio. Para hacer la verificación, podemos usar el recurso de la gráfica de los residuos. Tal como se muestra, no se observa tendencia ni estacionalidad.

El gráfico del periodograma de los residuos tiene la forma de una línea paralela al eje X, evidenciando que en ninguna frecuencia se encuentra contribución de alguna componente en particular.

**Gráfico N° 2.24**  
**LIMA METROPOLITANA: PERIODOGRAMA DE LOS RESIDUOS DE LA PEA, 2002-2009**

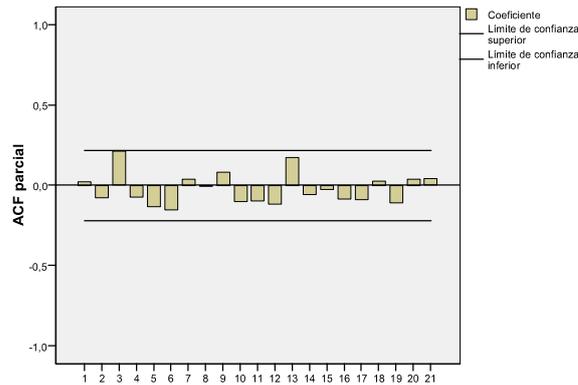


Fuente: INEI - EPE

Aparentemente, el residuo es un ruido blanco, veamos ahora el gráfico de las autocorrelaciones residuales. Estas se encuentran dentro de las

bandas de confianza y por lo tanto se confirma que los residuos se comportan como ruido blanco.

Gráfico N° 2.25  
LIMAMETROPOLITANA: CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS DE LA PEA, 2002-2009



Fuente: INEI - EPE

En conclusión, el modelo estimado recoge "todo lo importante" de la serie, quedando como residuos un comportamiento totalmente aleatorio y pronosticando para finales del año 2010 en Lima

Metropolitana una PEA de 4 millones 730 mil personas, manteniendo un incremento durante los tres primeros meses del año y en el mes de diciembre como parte de la estacionalidad.

## SERIE II: EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES DEL PERÚ DURANTE EL PERIODO 1985 - 2009

### A. INTRODUCCIÓN

El comercio exterior es muy importante en la actividad económica de los países, gracias a ello los "países más exitosos" han logrado su crecimiento y desarrollo económico. En el caso de Perú, los gobiernos han implementado diversas medidas económicas relacionadas con el comercio exterior y con las exportaciones, pero la falta de una política de incentivo y promoción a las exportaciones; además, de otros factores que ha frustrado obtener el éxito que se esperaba. Sin embargo, el establecimiento de una economía de mercado en el marco de la liberalización del comercio exterior peruano, ha hecho que las exportaciones nominales se incrementen.



La serie de análisis está referida a las exportaciones mensuales de productos que tradicionalmente comercializa nuestro país y comprende el periodo de 1985 al 2009 y su registro está en millones de dólares. El análisis y estimación de la serie se realizará mediante métodos de suavización.

Se consideran exportaciones tradicionales: cobre, oro, zinc, hierro, harina de pescado, azúcar, café, algodón, petróleo crudo, y entre otros.

Haciendo una revisión previa de los datos, encontramos que no presenta error de digitación y la información se encuentra completa.

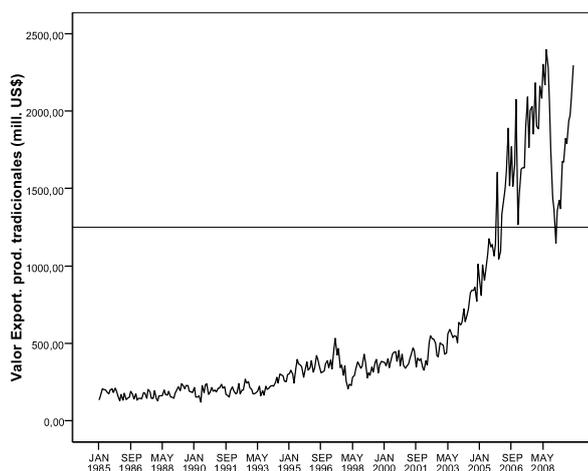
**Cuadro N° 2.26**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009**  
 (Millones de dólares norteamericanos)

MES/AÑO	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
ENERO	137,2	162,3	131,4	143,4	178,1	216	193,1	218,5	203	225,2	307,9	327,5
FEBRERO	163,5	128,3	145,4	131,1	203	153,1	197,9	194,9	176,3	229,2	327,1	343,7
MARZO	205,9	169	144	163,3	221,2	155,3	188,2	173,1	174,6	225,3	301,1	390,6
ABRIL	202,3	132	143,5	161,9	193,6	162,2	212,2	177,5	182,4	249,2	245,3	314,8
MAYO	197,9	177,4	183,1	160,2	242,2	122,2	211,4	242,5	192,6	281,9	342,3	339
JUNIO	185,8	138,6	177,3	200,3	225,4	227,4	235,6	175,7	223,8	245,6	396,3	423,8
JULIO	174,6	146,1	147,3	171,1	209,1	184,3	213,2	200,1	162,2	300,7	367,8	398,2
AGOSTO	198,4	152,1	204,7	167,3	228,7	230,4	219,4	200,2	196,7	298,8	362,3	358,5
SETIEMBRE	206,5	190,6	187,9	189,1	227,8	242	172,1	270,9	166,1	291,7	348,7	310,4
OCTUBRE	184,2	170,6	147,7	155,4	189,5	169,1	166,6	243,1	224,6	256,2	282,5	315,7
NOVIEMBRE	213	140,8	145,3	152,6	187,2	180,9	155,6	251,5	204,4	254,8	321,7	323,7
DICIEMBRE	189,7	176,2	193,3	147,3	183,9	215,7	193,9	214,3	211,6	297,9	380,7	367,6

MES/AÑO	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
ENERO	388	255,7	381,1	378,1	359,2	342,1	496,8	619	921,8	1046	1268	1903	1150
FEBRERO	345,8	208	279,6	354,6	339,5	327,3	489,7	637,8	808,7	1096	1462	1886	1357
MARZO	391,5	237,8	311,6	400	351,8	387,6	429,2	725,2	1008	1339	1628	2163	1425
ABRIL	333,9	230,1	295,7	344,5	366,9	360,3	440,6	639,1	907,4	1432	1638	2087	1371
MAYO	463,2	280,3	347	382,1	403,8	502,8	560,7	687,7	974,8	1501	1635	2303	1675
JUNIO	532,9	292,5	314,4	430	443,3	549	589,6	723,3	1079	1613	1898	2172	1675
JULIO	425,7	333,9	379	442,3	471,8	529,4	569,4	828,4	1178	1891	2092	2398	1862
AGOSTO	466,2	381,2	396	447	451,3	530,2	539,7	843,7	1123	1521	1767	2283	1793
SETIEMBRE	345,2	362,8	312,8	384,8	346,5	499,8	548,4	843,6	1140	1770	2005	2048	1941
OCTUBRE	358,36	341,2	358,7	445,6	405,5	420,1	547,5	865,5	1065	1517	2032	1747	1973
NOVIEMBRE	296,1	357,7	383,3	355	389,3	413,5	506,6	774,8	1139	1656	1856	1440	2089
DICIEMBRE	357,8	430,8	382,7	430,5	401,4	506,6	638,2	1011	1605	2078	2183	1367	2295

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

**Gráfico N° 2.26**  
**PERÚ: EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2008**  
 (VARIACIÓN MENSUAL EN MILLONES DE DÓLARES NORTEAMERICANOS)

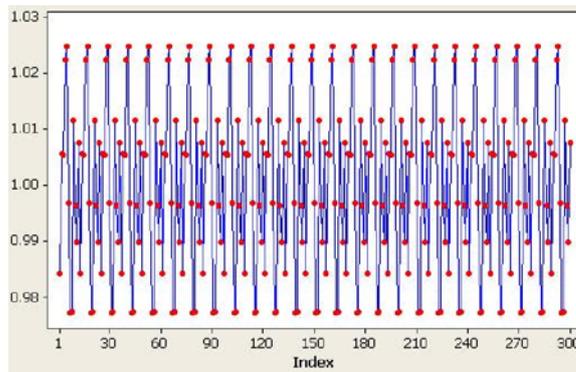


Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Las exportaciones de productos tradicionales tienen tanto tendencia como estacionalidad determinística. Se observa que la serie muestra una tendencia creciente de tipo exponencial, verificamos este comportamiento mediante el cálculo de  $Y_t/Y_{t-1}$  cuyo resultado es  $k=1$  para toda la serie. Aplicando transformación logarítmica, linealizamos la serie.

Por otro lado, las exportaciones de productos tradicionales muestran una marcada estacionalidad, con picos y caídas muy marcados en los distintos meses. Si descomponemos la serie y graficamos la componente estacional tendremos:

**Gráfico N° 2.27**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTACIONALES DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(MILLONES DE DÓLARES NORTEAMERICANOS)**

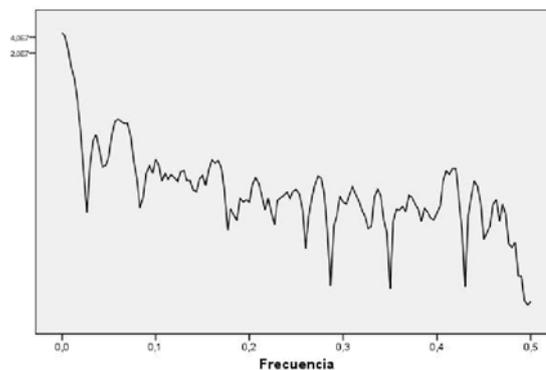


Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

El gráfico del periodograma presenta la intensidad máxima en la frecuencia 0,0 correspondiente a la tendencia de la serie. La segunda frecuencia más

alta se presenta en  $w=0.08$  que equivale a la estacionalidad  $S=12$

**Gráfico N° 2.28**  
**PERÚ: PERIODOGRAMA DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**

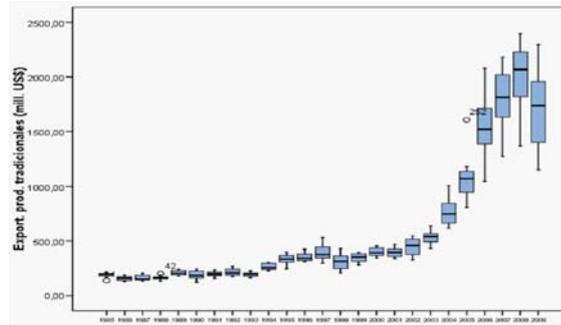


Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

El gráfico de cajas simple muestra un dato discordante en el 2005; sin embargo, debemos considerarlo como una posible intervención por cuanto se aprecia un cambio total en el proceso a partir de las cajas del 2006. Aún cuando no es nuestro propósito, sugerimos considerar la

aplicación de modelos de intervención para estimar esta serie. Es probable que este cambio en el proceso esté relacionado con los cambios producidos en la política de exportaciones o a situaciones coyunturales.

**Gráfico N° 2.29**  
**PERÚ: EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, PORAÑO, 1985- 2009**  
**(VARIACIÓN MENSUAL EN MILLONES DE DÓLARES NORTEAMERICANOS)**

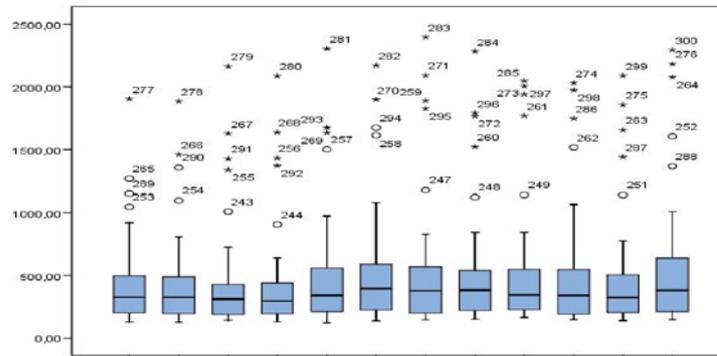


Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

El gráfico de cajas agregadas revela una gran cantidad de datos discordantes desde la observación 243 que corresponde a marzo del 2005. Esto es debido a que los volúmenes y los precios de los productos tradicionales exportados

se incrementaron, en ese año, principalmente en el sector minero tales como el precio del oro y el precio del cobre. Este gráfico muestra el efecto del cambio en el comportamiento del proceso sobre la estacionalidad.

**Gráfico N° 2.30**  
**PERÚ: EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, PORMES, 1985- 2009**  
**(MILLONES DE DÓLARES NORTEAMERICANOS)**

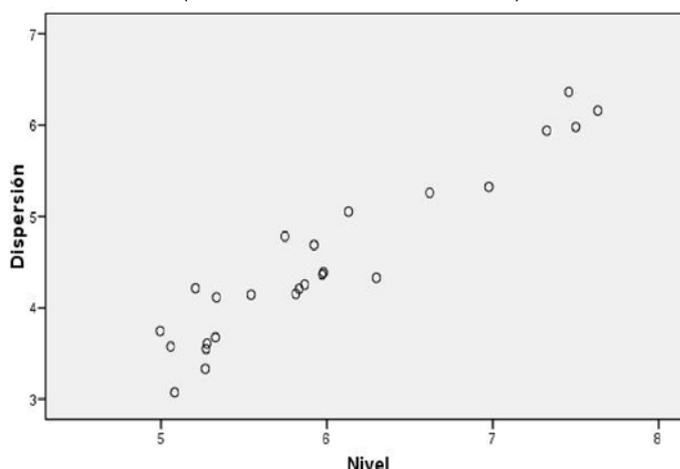


Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Tratando de determinar el tipo de modelo al cual corresponde la serie, se ha elaborado el gráfico de dispersión vs. Nivel. Ya a partir de la serie original se observó un incremento en la variabilidad en relación al cambio en el nivel,

confirmamos ahora esto al analizar el siguiente gráfico y determinar que existe un posible ajuste a una recta cuya pendiente es diferente de cero ( $p=1.049$ ) lo que nos sugiere que es un modelo multiplicativo.

**Gráfico N° 2.31**  
**PERÚ: DISPERSIÓN VS NIVEL EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985-2009.**  
**(MILLONES DE DÓLARES NORTEAMERICANOS)**



\* Gráfico de LN de dispersión por LN de nivel

Inclinación = 1.049 Potencia para transformación = -.049

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

## B. MÉTODO PARA MODELAR LA SERIE "EXPORTACIONES TRADICIONALES"

Para hacer la estimación de la serie en su conjunto aplicamos transformación logarítmica a la serie a

fin de linealizar la pendiente, luego de lo cual se realiza la estimación mediante el método de Holt & Winter.

**Cuadro N° 2.27**  
**PERÚ: ESTADÍSTICOS DE AJUSTE DE LA EXPORTACIÓN DE PRODUCTOS**  
**TRADICIONALES, 1985 - 2009**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

Estadístico de Ajuste	Media	Mínimo	Máximo
R-cuadrado	0,974	0,974	0,974
RMSE	92,937	92,937	92,937
MAPE	10,267	10,267	10,267
Max APE	50,575	50,575	50,575
MAE	53,183	53,183	53,183
Max AE	565,105	565,105	565,105
BIC normalizado	9,121	9,121	9,121

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Un coeficiente de determinación mayor que otros modelos y estadísticos para el error mínimos, son los que conforman el conjunto de estadísticos de ajuste óptimos para el modelo de Holt & Winter. Completamos la evaluación del ajuste con un estadístico de Box Y Lung igual a 22,615 que a un

nivel de significancia del 5,0% para una Chi-cuadrado con 15 grados de libertad no se rechaza que las autocorrelaciones de los residuos sean ruido blanco, por lo tanto el modelo es el adecuado.

**Cuadro N° 2.28**  
**PERÚ: ESTADÍSTICOS DEL MODELO DE LA EXPORTACIÓN DE PRODUCTOS TRADICIONALES,**  
**1985 - 2009**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

MODELO	Estadísticos de ajuste del modelo		Ljung-Box Q(18)		
	R-cuadrado estacionaria	Estadísticos	G.L.	Sig	
Export.prod. Tradicionales (mill.U\$S)	0,557	22,615	15	0,093	

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Las constantes de suavización para el modelo de Holt & Winters se muestra a continuación:

**Cuadro N° 2.29**  
**PERÚ: ESTIMACIÓN DE LA EXPORTACIÓN DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 -2009**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

CONSTANTES DE SUAIVIZACIÓN - EXPORTACIONES				
		Estimación	t	Sig
Log natural	ALFA (NIVEL)	0,517	10,542	0
	BETA (TENDENCIA)	0,001	0,13	0,896
	GAMMA (ESTACIONALIDAD)	0,134	3,472	0,001

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

$$\hat{a}_t = 0.517 \frac{Y_t}{\hat{c}_t(\sigma-s)} + (1-0.517) (\hat{a}_{(t-1)} + \hat{b}_{(t-1)})$$

estimación del parámetro de nivel

$$\hat{b}_t = 0.001 (a_t - \alpha_1((t-1))) + (1-0.001) \hat{b}_{(t-1)}$$

estimación del parámetro de tendencia

$$\hat{c}_t = 0.134 \frac{Y_t}{\hat{a}_t} + (1-0.134) (\hat{c}_t(\sigma-s))$$

estimación del parámetro estacional por coeficientes Los valores iniciales para:

a(0) =  $\bar{Y}_{25}$  = 1714 ... (media del último año)

b(0) =  $\bar{Y}_{24} - \bar{Y}_{25}$  = 1983 - 1714 = 268.8 ... (diferencia de promedios de los últimos dos años)

c(0) = coeficientes estacionales

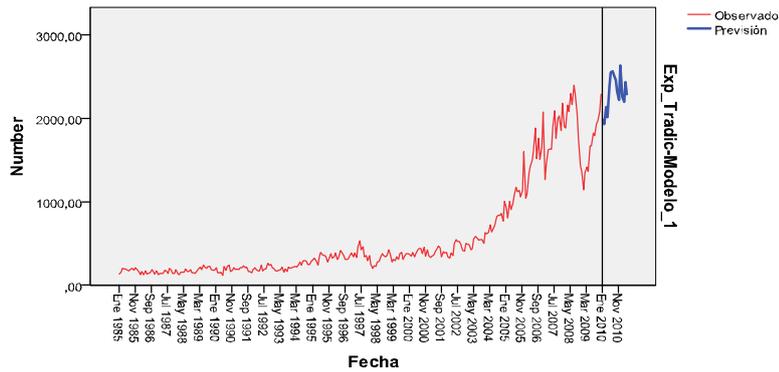
**Cuadro N° 2.30**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTACIONALES DE LA EXPORTACIÓN DE PRODUCTOS TRADICIONALES,**  
**1985 - 2009**  
**(Porcentaje)**

Periodo	Coefficientes estacionales (%)
1	94,7
2	89,5
3	95,4
4	90,3
5	104,3
6	108,8
7	107,1
8	108,4
9	104,3
10	97,3
11	93,6
12	106,2

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

De esta manera, obtenemos:  $\hat{y}_t = (at + bt)ct$  que es la estimación del modelo multiplicativo de Holt & Winters. La gráfica para la serie completa estimada es la siguiente, los valores pronosticados en el futuro se muestran con azul.

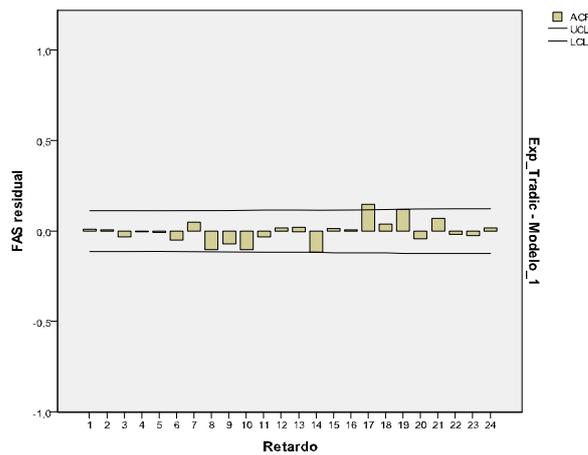
**Gráfico N° 2.32**  
**PERÚ: EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, ORIGINAL VS ESTIMADA Y PRONOSTICADA, 1985 - 2009.**  
**(MILLONES DE DÓLARES NORTEAMERICANOS)**



Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Para este modelo las autocorrelaciones de los residuales, siguen un comportamiento tipo ruido blanco, tal como se observa en el correlograma residual para exportaciones no tradicionales.

**Gráfico N° 2.33**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Finalmente, una vez evaluado el modelo, la serie estimada para 2010-2011 se muestra a continuación.

**Cuadro N° 2.31**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DE LA EXPORTACIÓN DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 2010 - 2011**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

	2010	2011
ENE	1984,59	2259,83
FEB	1936,31	2203,37
MAR	2140,65	2440,47
ABR	2015,71	2294,83
MAY	2374,75	2712,18
JUN	2554,25	2921,05
JUL	2570,78	
AGO	2524,45	
SEP	2460,51	
OCT	2322,73	
NOV	2225,48	
DIC	2635,37	

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Es importante señalar que estos pronósticos se mantendrán en tanto la situación económica y otras relacionadas con las exportaciones, permanezcan

constante. Los cambios en la tendencia o en cualquiera otra de las componentes implicarían modificar el modelo.

**SERIE III: EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO DURANTE EL PERIODO 1992 - 2009**

<p>Analizaremos la serie "Volumen de exportación de Harina de Pescado" (miles de TM) cuyo registro es desde enero de 1992 hasta agosto del 2010.</p> <p>Tradicionalmente, Perú es un país pesquero, con historia en el último siglo en producción y exportación de harina de pescado. La exportación de Harina de Pescado está relacionada con factores como la temperatura del mar peruano, ya que el principal insumo para su producción es la anchoveta, la cual constituye una de las denominadas especies "pelágicas" (habitan a poca profundidad) por lo cual es muy sensible al aumento de la temperatura. Esto se refleja en el comportamiento de la serie, la cual presenta ciclos múltiples de amplitud variable, que pueden estar vinculados con los cambios cíclicos de clima además de otros agentes.</p>	
--	--

La modelización para esta serie ha demandado aplicar coeficientes estacionales, y coeficientes cíclicos. El cálculo de los coeficientes ha sido posible gracias al programa Minitab. Para

reproducirlos puede aplicarse de manera manual el método de Porcentaje de Tendencia descrito en secciones anteriores.

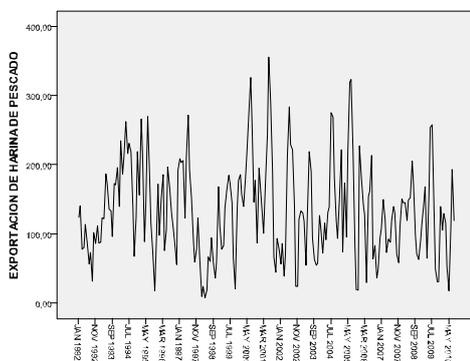
**Cuadro N° 2.32**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO, 1992 - 2010**  
 (Miles de toneladas métricas)

	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Enero	124,6	87,6	139,7	156,7	98,5	208,8	61,9	112,6	186,3	169,2
Febrero	141,0	88,3	234,6	266,7	151,6	204,0	9,7	78,2	157,9	130,3
Marzo	77,9	123,2	187,1	216,6	185,7	206,1	24,3	83,7	139,7	101,1
Abril	80,5	122,2	211,1	89,2	76,1	123,8	7,8	137,7	182,5	176,1
Mayo	114,1	186,8	262,8	142,2	107,1	211,0	19,5	165,2	216,0	244,2
Junio	87,7	172,8	216,5	270,2	197,1	272,2	67,2	185,4	271,4	355,8
Julio	56,6	136,7	231,5	182,7	168,7	192,4	60,4	172,8	326,4	291,3
Agosto	73,3	133,5	219,7	115,6	130,9	152,6	94,4	145,7	264,7	189,4
Septiembre	31,7	96,9	138,6	71,6	114,6	91,0	58,9	66,4	146,7	67,4
Octubre	102,4	173,3	67,9	18,5	87,4	59,8	36,5	20,8	178,0	45,0
Noviembre	86,6	171,1	124,3	76,5	56,0	79,1	60,6	135,2	87,6	93,8
Diciembre	112,0	196,7	219,3	171,9	192,8	123,6	168,4	177,4	194,9	79,4

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Enero	57,0	133,3	108,8	222,1	182,8	107,9	151,3	115,0	106,0
Febrero	86,9	130,4	72,4	74,7	143,9	150,0	145,2	145,0	130,2
Marzo	39,2	118,7	115,8	174,2	127,7	120,6	145,5	168,5	115,9
Abril	71,0	55,1	92,0	95,5	29,8	73,4	119,9	65,3	52,2
Mayo	212,6	126,5	132,0	219,0	155,0	93,4	149,1	157,9	18,3
Junio	283,7	219,1	138,9	319,7	162,5	88,3	152,7	254,4	109,0
Julio	229,7	190,7	276,0	323,8	213,3	119,8	205,6	257,9	193,0
Agosto	222,4	95,0	268,7	222,3	64,0	140,3	172,5	130,9	119,5
Septiembre	141,9	63,1	182,4	83,3	84,1	131,2	97,7	49,9	
Octubre	24,7	55,5	119,8	19,7	36,3	70,6	71,7	31,1	
Noviembre	24,8	57,9	93,8	19,5	48,7	58,4	63,9	31,1	
Diciembre	121,5	127,4	152,8	227,7	94,4	110,0	89,8	140,3	

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

**Gráfico N° 2.34**  
**PERÚ: PROMEDIO ANUAL DE EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO, 1992-2009**  
 (Miles de toneladas métricas)



Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

El gráfico de la serie original muestra un comportamiento irregular en la variabilidad, con presencia de componente estacional y probables ciclos.

**Cuadro N° 2.33**  
**PERÚ: PERIODOGRAMA DE LA EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO, 1992 - 2010**  
 (Miles de toneladas métricas)

Frecuencia	Periodo	Periodograma
,00000		,000
,00446	224,0	8554,530
,00893	112,0	26283,654
<b>,01339</b>	<b>74,7</b>	<b>57602,779</b>
,01786	56,0	55680,197
<b>,02232</b>	<b>44,8</b>	<b>65612,917</b>
,02679	37,3	23540,409
,03125	32,0	41325,310
,03571	28,0	781,870
,04018	24,9	8553,201
,04464	22,4	15877,619
,04911	20,4	10826,246
,05357	18,7	1796,132
,05804	17,2	1655,330
,06250	16,0	17440,991
,06696	14,9	1194,535
,07143	14,0	23078,950
,07589	13,2	5142,566
<b>,08036</b>	<b>12,4</b>	<b>90640,101</b>
,08482	11,8	80465,101
,08929	11,2	19570,194

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Ciclos: La serie presenta múltiples ciclos, siendo los de mayor intensidad:

$P_1 = 44,8$  (cada 45 meses o equivalente a 4 años aproximadamente)

$P_2 = 74,7$  (cada 75 meses o equivalente a 6 años aproximadamente)

Estacionalidad: La presencia de esta componente se caracteriza con la intensidad máxima:  $P_3 = 12,4$  (12 meses)

Longitud estacional:  $S = 12$

La tendencia presenta un comportamiento estable, es decir, no se observa crecimiento ni disminución en el volumen de exportaciones de Harina de Pescado, a largo plazo.

### **PRONÓSTICOS PARA LOS PRÓXIMOS DOS AÑOS**

La estimación de pronósticos se realizó mediante método de descomposición.

Se estimó la tendencia mediante promedios móviles de amplitud 45 (debido a la presencia significativa de un ciclo de esa amplitud). Se eligió

este método para estimar la tendencia debido a la estabilidad de esta componente en la serie.

Se estimó la estacionalidad de orden 12 mediante coeficientes estacionales.

Se estimaron los ciclos de amplitud 45 y 75 mediante coeficiente cíclicos. En la tabla que a continuación se muestra aparece parte de estos coeficientes.

La integración de tendencia, estacionalidad y ciclo se ha realizado teniendo en cuenta el tipo de modelo, en este caso: multiplicativo.

**Cuadro N° 2.34**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DE LA EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO, 2010 - 2011**  
 (Miles de toneladas métricas)

Año	Mes	Estimación Tendencia por Prom. Móvil (45)	Estimación estacionalidad por Coeficientes Estacionales	Estimación de ciclo de amplitud 45	Estimación de ciclo de amplitud 75	Pronóstico de tendencia estacionalidad	Pronóstico con Tendencia, estacionalidad y ciclo 45	Pronóstico con Tendencia, estacionalidad y ciclo 75
2010	E	118,1	1,01	0,67	1,07	119,18	79,66	127,31
2010	F	116,8	1,06	0,84	1,11	123,84	104,47	137,53
2010	M	114,9	1,05	0,77	0,9	120,73	93,09	108,42
2010	A	116,1	0,63	0,76	1	73,1	55,65	73,03
2010	M	115,3	1,19	0,75	0,85	137,23	103,29	116,78
2010	J	114,9	1,45	0,76	1,34	166,2	126,83	222,1
2010	J	116,3	1,59	0,83	0,82	185,28	154,27	152,1
2010	A	118,6	1,09	0,88	1,04	129,87	114,1	134,56
2010	S	118,9	0,73	0,9	0,7	86,87	78,19	60,69
2010	O	118,2	0,51	0,92	0,63	60,18	55,28	37,68
2010	N	118,1	0,57	0,97	0,97	67,24	65,29	65,27
2010	D	119,2	1,12	0,88	0,81	133,15	117,14	107,52
2011	E	119,8	1,01	0,85	0,7	120,82	102,13	84,87
2011	F	120,5	1,06	0,87	1,03	127,74	111,16	131,32
2011	M	120,5	1,05	1	1,15	126,64	127,19	145,45
2011	A	120	0,63	1,15	0,87	75,59	87,1	65,87
2011	M	119,8	1,19	1,46	1,04	142,5	208,58	148,63
2011	J	120,9	1,45	1,47	0,98	174,87	257,81	171,89
2011	J	122,4	1,59	1,25	0,98	194,92	243,79	191,1
2011	A	122,7	1,09	1,44	1,37	134,3	193,74	183,44

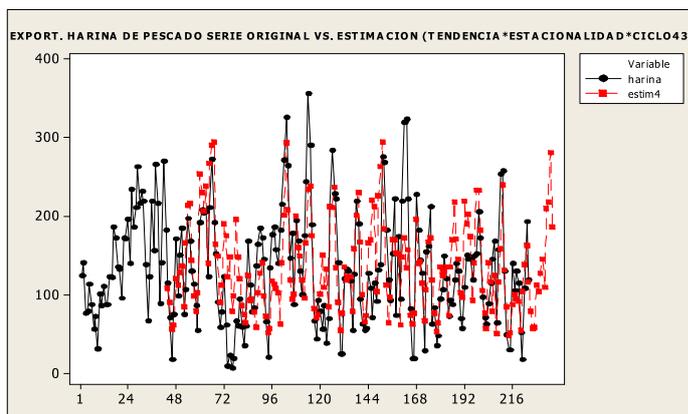
Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Las dos últimas columnas de la tabla muestran dos propuestas de pronósticos. Dado que en el análisis del periodograma el ciclo de amplitud 45 tiene mayor intensidad que el ciclo de amplitud 75, se considera adecuado estimar la serie como:

$$\text{Tendencia} * \text{Estacionalidad} * \text{Ciclo (amplitud 45)} = \hat{Y}_t$$

Los pronósticos se muestran en la penúltima columna. La gráfica que a continuación se presenta permite comparar la serie original con la serie estimada, más los pronósticos.

**Gráfico N° 2.35**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN DE HARINA DE PESCADO, ORIGINAL VS. ESTIMADA Y PRONOSTICADA, 1992-2009**



Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

**SERIE IV: EXPORTACIÓN DE PESCA PARA CONSUMO HUMANO DIRECTO. 1992 - 2009**

La serie Pesca para Consumo Humano Directo consta de 224 registros mensuales, cuyo periodo de observación está comprendido entre: Enero 1992 - Agosto 2010.

La unidad de registro es miles de TM y la serie está conformada por la exportación de las capturas totales de las diversas especies destinadas al consumo humano en el litoral peruano.



**Cuadro N° 2.35**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN DE PESCA PARA CONSUMO HUMANO, 1992 - 2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**

	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
<b>Enero</b>	2,1	1,3	3,3	5,2	4,6	13,6	10,1	6,0	7,8	11,9
<b>Febrero</b>	2,3	1,3	3,6	6,8	6,1	13,4	7,8	9,0	9,6	12,0
<b>Marzo</b>	1,8	1,0	4,7	7,5	8,8	17,3	9,2	10,2	10,0	13,4
<b>Abril</b>	1,5	1,6	3,9	5,0	8,0	15,5	7,3	7,0	6,7	10,7
<b>Mayo</b>	1,7	3,2	4,2	5,3	6,8	13,5	7,5	10,6	6,3	14,0
<b>Junio</b>	2,1	2,2	4,1	5,4	6,3	13,5	6,6	6,8	6,2	9,3
<b>Julio</b>	1,6	2,4	5,7	6,1	7,8	12,8	5,5	7,9	9,8	10,2
<b>Agosto</b>	1,7	2,8	4,9	6,1	6,9	10,7	5,0	5,9	10,7	10,3
<b>Septiembre</b>	1,9	2,6	7,7	6,6	5,0	11,3	5,6	8,5	10,0	10,7
<b>Octubre</b>	1,5	2,9	4,8	5,6	5,1	12,5	6,7	8,6	9,7	10,8
<b>Noviembre</b>	2,0	3,2	4,3	5,1	7,0	11,8	5,5	7,4	8,6	9,7
<b>Diciembre</b>	2,0	4,3	4,1	5,3	6,6	10,1	6,1	9,2	10,0	10,0

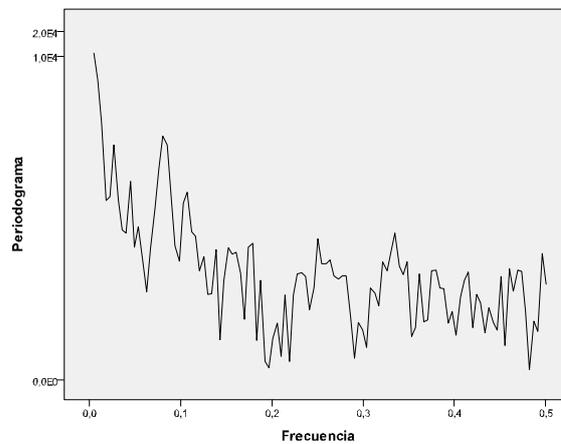
	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
<b>Enero</b>	8,8	10,4	11,9	12,7	21,6	27,1	24,2	21,8	10,0
<b>Febrero</b>	11,1	11,8	16,4	20,8	22,6	36,6	36,4	32,3	22,6
<b>Marzo</b>	9,1	14,7	18,1	17,3	28,8	46,7	42,1	38,0	38,1
<b>Abril</b>	11,5	15,4	19,4	17,0	31,5	42,9	32,9	30,5	32,5
<b>Mayo</b>	11,8	12,7	20,3	20,2	32,4	33,3	30,3	33,6	30,4
<b>Junio</b>	15,5	13,3	21,1	20,4	31,2	26,5	40,9	42,5	44,2
<b>Julio</b>	11,0	13,9	19,5	14,6	31,2	25,0	28,7	38,2	17,3
<b>Agosto</b>	7,8	9,8	14,9	14,9	29,7	25,9	33,9	29,3	16,7
<b>Septiembre</b>	6,9	10,7	11,8	11,7	27,3	16,2	33,0	30,8	
<b>Octubre</b>	5,3	12,1	14,0	12,5	22,2	20,3	29,6	20,1	
<b>Noviembre</b>	6,5	11,4	15,1	13,4	23,0	15,6	24,4	17,7	
<b>Diciembre</b>	10,5	16,9	14,6	17,4	28,0	23,6	19,4	17,0	

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

La observación de la serie original permite determinar de manera rápida la asociación existente entre la variabilidad y el cambio en el nivel, es decir, que conforme transcurre el tiempo y el nivel aumenta, la variabilidad de la serie también se incrementa. En consecuencia el modelo es de tipo multiplicativo.

La longitud estacional se determinó con el gráfico del periodograma, encontrando que es "S=12". La tendencia es "Lineal creciente". Aún cuando en el periodograma se presentan indicios de ciclos de amplitud 20; asumimos que en realidad, este es un indicador de la tendencia de la serie.

**Gráfico N° 2.36**  
**PERÚ: PERIODOGRAMA DE LA EXPORTACIÓN PESCA PARA CONSUMO HUMANO, 1992-2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

**Cuadro N° 2.36**  
**PERÚ: PERIODOGRAMA DE PESCA PARA CONSUMO HUMANO, 1992 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

**EXPORTACIONES DE CONSUMO DIRECTO**

Frecuencia	Periodo	Periodograma
.00000		.000
<b>.00446</b>	<b>224</b>	<b>11048.375</b>
.00893	112	5143.142
.01339	75	1487.594
.01786	56	165.041
.02232	45	183.210
.02679	37	801.980
.03125	32	167.003
.03571	28	71.020
.04018	25	64.971
.04464	22	282.452
.04911	20	43.524
.05357	19	77.637
.05804	17	28.629
.06250	16	11.438
.06696	15	41.272
.07143	14	131.685
.07589	13	407.518
<b>.08036</b>	<b>12</b>	<b>1041.448</b>
.08482	12	807.680
.08929	11	188.305
.09375	11	44.542

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

Después de la tendencia, el pico más alto se presenta en el periodo S=12, que corresponde a la intensidad. Recordemos que: Intensidad máxima en el primer periodo equivale en realidad a "tendencia".

Para la modelización, se aplicó el método de estimación de Holt & Winters multiplicativo.

Las constantes de suavización del modelo son:

Nivel:  $\alpha = 0,70$

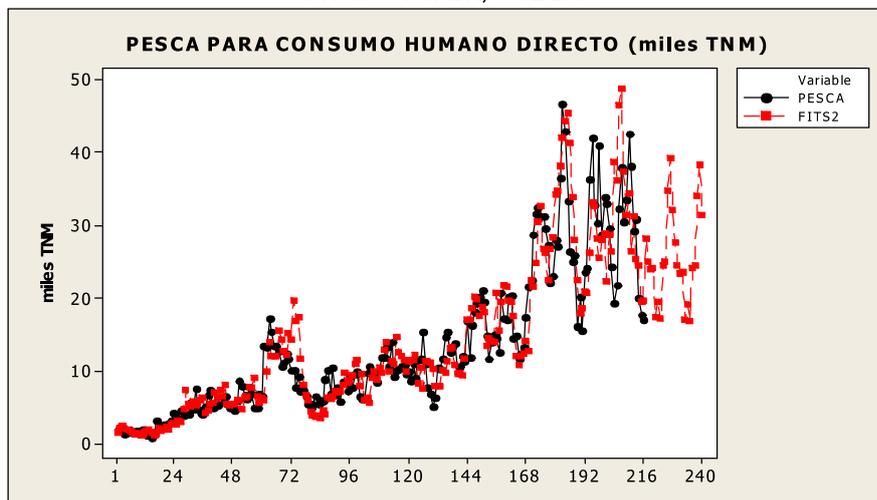
Tendencia:  $\beta = 0,05$

Estacionalidad:  $\gamma = 0,10$

Los cuales son los óptimos de un grupo de combinaciones de valores  $\alpha, \beta, \gamma$ :

Con esta combinación, se consigue una estimación que reproduce el comportamiento de la serie original y que permite obtener las estimaciones que se presentan a continuación.

**Gráfico N° 2.37**  
**PERÚ: EXPORTACIÓN PESCA PARA CONSUMO HUMANO, ORIGINAL VS ESTIMADA Y PRONOSTICADA, 1992-2009**



Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

**Cuadro N° 2.37**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DE PESCA PARA CONSUMO HUMANO, 2010 - 2011**  
**(Miles de toneladas métricas)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
2010	34,0	31,2	30,6	27,7	26,1	26,0	25,4	30,0	29,3	36,0	40,9	37,9
2011	37,4	34,3	33,6	30,5	28,6	28,5	27,8	32,8	32,0	39,4	44,7	41,4

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú

1. ¿Porqué será adecuado la aplicación del método de Holt & Winters?
2. Compare el ajuste obtenido por Holt & Winters con el ajuste por modelos de descomposición



*Centro de Investigación y Desarrollo*



## **CAPÍTULO III**

# **Modelización Mediante el Enfoque de Dominio del Tiempo (Modelos de Box & Jenkins)**



**ENFOQUE DE DOMINIO DEL TIEMPO**  
(Modelos de Box & Jenkins)

$$\Phi_s (B^s) \phi (B) \nabla^d \nabla_{D_s} Z_t = \Theta_s (B_s) \theta (B)$$

**Objetivo:** Dada  $Z_t$  serie en  $t \in (t_0, t_n)$  vamos a hallar un modelo:

**Por ejemplo:**

Cuyos parámetros son:

Sea  $Z_t$ : Vol. Venta de Leche Evaporada Enero 1994-Diciembre 2009.

$\Phi, \phi, \Theta, \theta$  con los cuales podemos estimar el comportamiento del proceso  $\{Z_t\}$  en  $t \in (t_0, t_{n+k})$  para todo  $k \geq 0$ .

Buscamos el modelo, estimamos el parámetro de este y pronosticaremos el volumen de ventas desde enero de 2010 hasta diciembre de 2011.

El enfoque de Dominio del Tiempo sigue los siguientes pasos:



**PRINCIPALES MODELOS DEL ENFOQUE DEL TIEMPO**

- " Modelos (uni y multivariados)
- " Medias móviles MA(q)
- " Autorregresivos AR (p)
- " Mixtos ARMA(p,q)
- " Integrados ARIMA (p,d,q)
- " Estacionales SARIMA(P,D,Q)<sub>s</sub> (p,d,q)
- " Heterocedásticos ARCH
- " Espaciales COARIMA

El proceso lineal genera  $\{Y_t\}$  es tal que:



Figura 3.1 Filtro

Donde:

$$Y_t = \mu + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots + \psi_0 a_t / \psi_0 = 1$$

O sin  $\mu$  :

$$\tilde{Y}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots$$

luego:

$$\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$$

**3.1 Proceso Lineal General:**

Sea  $\{a_t\}$  el proceso "ruido blanco", el cumple:

- "  $E(a_t) = 0$
- "  $V(a_t) = \sigma^2$  (varianza constante)
- "  $E(a_t, a_{t+k}) = 0$  (independiente en el tiempo), para todo  $k \neq 0$

¿Cómo es  $E(Y_t)$ ,  $V(Y_t)$ ,  $\gamma_k(Y_t)$  en función de los  $\psi$ 's para que el proceso sea estacionario?

$$E(Y_t) = E[\mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots] = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k E(a_{t-k}) = \mu$$

$$V(Y_t) = V[\mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots]$$

$$E(Y_t - \mu)^2 = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k E(a_{t-k})\right]^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 E(a_{t-k}^2) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k+i} E(a_{t-k} a_{t-k-i})$$

$$E(a_{t-k} a_{t-k-i}) = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{k+i} \psi_k$$

Para que un proceso sea estacionario debe cumplirse:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2 < \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \psi_{k+i} < \infty \quad (3.1)$$

Sea B operador de retardo /  $B^d Y_t = Y_{t-d}$

Si expresamos  $\tilde{Y}_t$  en términos del operador de retardo:

$$\tilde{Y}_t = \psi(B) a_t$$

Si se quiere suponer (3.1), es equivalente a imponer ciertas condiciones a  $\psi(B)$ , la principal de las cuales es la convergencia en  $|B| < 1$

De otra forma, el proceso  $\tilde{Y}_t$  puede expresarse como:

$$\tilde{Y}_t = a_t + \pi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Y}_{t-2} + \pi_3 \tilde{Y}_{t-3} + \dots$$

$$= a_t + \pi_1 B \tilde{Y}_t + \pi_2 B^2 \tilde{Y}_t + \pi_3 B^3 \tilde{Y}_t + \dots$$

$$\tilde{Y}_t - \pi_1 B \tilde{Y}_t - \pi_2 B^2 \tilde{Y}_t - \pi_3 B^3 \tilde{Y}_t - \dots = a_t$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots) \tilde{Y}_t = a_t$$

$$\pi(B) \tilde{Y}_t = a_t$$

Luego tenemos dos expresiones del proceso:

$$\tilde{Y}_t = \psi(B) a_t \quad \pi(B) \tilde{Y}_t = a_t$$

Si ambas son expresiones adecuadas de

$\tilde{Y}_t$  hallamos que:  $\psi(B) \pi(B) = 1$

$$\pi(B) = \psi(B)^{-1}$$

### 3.1.1 Estimación de la Función de Autocovarianza y Autocorrelación

En el capítulo I, se definió de manera introductoria la autocovarianza y la autocorrelación. Ahora presentaremos ambos conceptos como una función para el proceso de  $\tilde{Y}_t$ .

La autocovarianza de retardo k bajo supuesto de  $Y_t$  estacionario es:

$$\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$$

$$\gamma_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{cov}(Y_t, Y_{t-k})$$

Observe que  $\gamma_k = \gamma_{-k}$  en el caso de series univariadas bajo supuesto de estacionariedad. En consecuencia para la autocorrelación de retardo k del proceso  $Y_t$ , definida como:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]}{E[(Y_t - \mu)^2]}$$

, cumple con  $\rho_k = \rho_{-k}$

Las estimaciones de ambas funciones, se presentan como:  $\hat{\gamma}_k = c_k$  y  $\hat{\rho}_k = r_k$  y son obtenidas a partir de los datos de la serie  $y_t$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})$$

Si tomamos la esperanza a la autocovarianza estimada se obtiene:

$$E(c_k) = \underbrace{\gamma_k - \frac{|k|}{n} \gamma_k + \frac{n-|k|}{n} \text{var}(\bar{y})}_{\text{sesgo}}$$

Observe que el sesgo que se representa en la estimación de la autocovarianza puede aumentar, dependiendo de qué tan grande es el retardo  $k$ . En consecuencia,  $r_k$  es también un estimador sesgado, cuyo sesgo puede crecer conforme crece  $k$ .

**APLICACIÓN:** Usando el programa EIEWS 7.0 presente las  $n/4$  autocorrelaciones

**Tema de Discusión:**

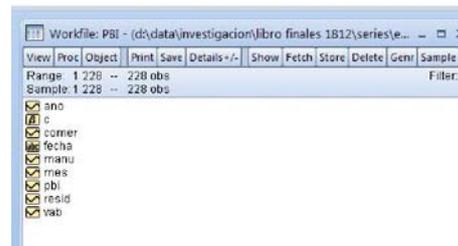
1. Usando la serie: PBI (Enero 1991-Diciembre 2009) calcule el sesgo de las autocovarianzas para  $k=n/4, n/3, n/2$  y obtenga una conclusión.
2. Recordando que las autocorrelaciones miden la asociación de la serie respecto a su propio pasado, ¿qué representa geoméricamente  $r_k$ ? Demuestre que la  $r_0 = 1$

estimadas de la serie PBI y el gráfico del correlograma simple.

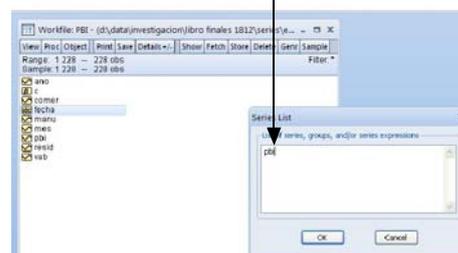
Ingresamos al programa y seguimos las siguientes secuencias: FILE/OPEN/EIEWS WORKFILE.

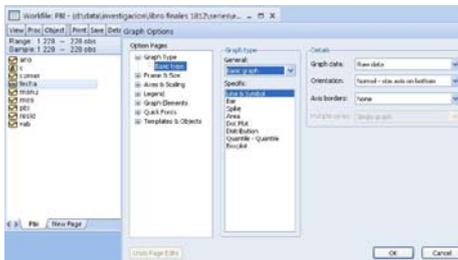
Aparece el campo para el ingreso de la dirección y nombre del archivo. Aceptamos e inmediatamente, se despliega la primera pantalla de trabajo:

Para graficar la serie PBI seleccionamos: QUICK/ GRAPH y al aparecer el campo "series list" ingresamos el nombre de la serie y pulsamos OK.

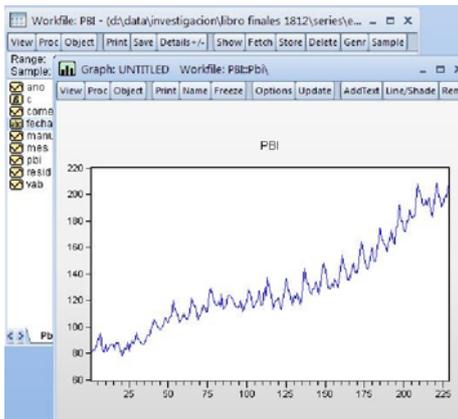


Aparece el menú desplegable "Graph options" en donde se puede dar las especificaciones del gráfico que se está solicitando. [Podemos dejar las especificaciones y automáticamente asume el programa y pulsar OK].

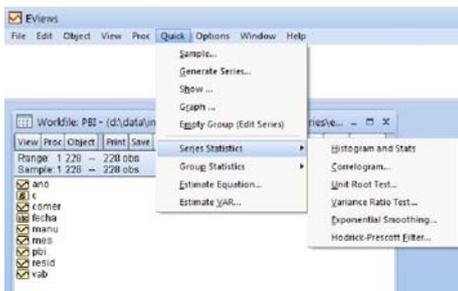




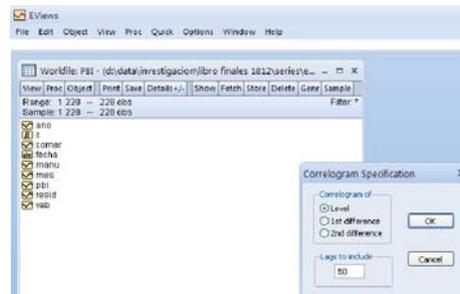
Aparece el gráfico de la serie PBI.



Para graficar el correlograma simple seleccionamos: QUICK/SERIES STATISTICS/CORRELOGRAM



Aparece una pequeña pantalla "correlogram specification" en donde podemos indicar: Si el correlograma se construye con la serie original, debemos marcar "level"; si se aplica 1 diferencia regular, marcamos "1st difference"; si se aplican 2 diferencias regulares, marcamos "2nd difference". Además, especificamos el número de autocorrelaciones a calcular en el espacio "lags to include" (recordar que el valor recomendado es aproximadamente  $n/4$ ). Finalmente pulsamos OK.



El resultado será: el gráfico del correlograma simple, el correlograma parcial, los valores de las autocorrelaciones simples, los valores de las autocorrelaciones parciales, la estadística Q-Stat con su respectiva Probabilidad (si la probabilidad es mayor que  $\alpha$  se considera que la autocorrelación es significativamente diferente de 0).

Date: 03/21/10 Time: 00:27  
Sample: 1 228  
Included observations: 228

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.968	0.968	216.38	0.000		
2	0.940	0.047	421.25	0.000		
3	0.913	0.020	615.70	0.000		
4	0.895	0.179	804.94	0.000		
5	0.896	0.202	993.74	0.000		
6	0.882	-0.143	1177.4	0.000		
7	0.867	0.015	1365.8	0.000		
8	0.839	-0.171	1523.8	0.000		
9	0.822	0.125	1665.7	0.000		
10	0.810	0.160	1846.7	0.000		
11	0.818	0.060	2008.4	0.000		
12	0.814	-0.076	2169.2	0.000		
13	0.785	-0.209	2319.6	0.000		
14	0.757	-0.029	2460.0	0.000		
15	0.729	-0.027	2599.9	0.000		
16	0.712	-0.001	2719.3	0.000		
17	0.705	0.067	2839.9	0.000		
18	0.686	-0.116	2957.1	0.000		
19	0.664	0.001	3067.8	0.000		
20	0.633	-0.027	3169.9	0.000		
21	0.611	0.010	3263.4	0.000		
22	0.605	0.132	3356.5	0.000		
23	0.602	0.032	3448.3	0.000		
24	0.595	-0.037	3540.4	0.000		
25	0.587	-0.156	3623.4	0.000		
26	0.539	0.002	3699.9	0.000		
27	0.513	-0.011	3767.5	0.000		
28	0.499	0.060	3832.9	0.000		
29	0.494	0.021	3897.2	0.000		
30	0.478	-0.036	3957.8	0.000		
31	0.462	0.066	4014.7	0.000		
32	0.434	-0.043	4065.1	0.000		
33	0.418	0.043	4112.1	0.000		
34	0.413	0.002	4169.1	0.000		
35	0.412	0.026	4204.2	0.000		

Observemos que las autocorrelaciones de la serie original decaen muy lentamente. Por otro lado la primera autocorrelación es muy próxima a la unidad (0.988). Ambos resultados son indicios de no estacionariedad por nivel. Por lo tanto será necesario aplicar diferencias finitas.

**¿Qué se sabe respecto a la varianza y a la distribución de  $r_k$ ?**

$r_k$  es una variable aleatoria y para utilizarla se necesita conocer su distribución. El trabajo inicial para determinar su distribución fue desarrollado por R. L. Anderson "Distribution of the Serial Correlation Coefficient" Annals of Mathematical Statistics Vol. 13 N°1 1942. Su distribución es difícil de hallar, pero Barlett cuatro años más tarde encontró:

$$Var(r_k) = 1/n \sum_{v=-\infty}^{\infty} \{\rho_v^2 + \rho_{v+k} - 4\rho_k\rho_v\rho_{v-k} + 2\rho_v^2\rho_k^2\}$$

La distribución de las  $r_k$  es asintóticamente normal.

Si un proceso es de la forma tal que las autocorrelaciones son casi nulas para  $k > q$  entonces:

$$Var(r_k) = 1/n \left\{ 1 + 2 \sum_{v=1}^q \rho_v^2 \right\} \quad k > q$$

**¿Cómo serán las autocorrelaciones de un proceso ruido blanco?**

Suponiendo que  $Y_t$  se comporte como ruido blanco  $r_k \rightarrow 0$ , luego basados en  $r_k$  asintóticamente normal, planteamos la siguiente dócima:

- $H_0: \rho_k = 0$ ..... Se espera rechazar  $H_0$  si  $Y_t$  no es ruido blanco
- $H_1: \rho_k \neq 0$ ..... Se espera no rechazar  $H_0$  si  $Y_t$  se comporta como  $a_t$

Considerando una aproximación al límite:

$\hat{\rho}_k \sim N(0, \sigma_{\hat{\rho}_k}^2)$ , pero  $V(\hat{\rho}_k)$  cuando se trata de  $a_t$ , es:

$$V(r_k) = 1/n \frac{\sum_{v=-\infty}^{\infty} \{\rho_v^2 + \rho_{v+k} - 4\rho_k\rho_v\rho_{v-k} + 2\rho_v^2\rho_k^2\}}{-1}$$

Luego  $V(r_k) = 1/n$  y considerando que es asintóticamente normal

$r_k \in (-2/\sqrt{n}; 2/\sqrt{n})$  en una generalización de los  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ .

Entonces: Si  $Y_t$  se comporta como ruido blanco sus  $k$  autocorrelaciones estimadas estarán dentro del intervalo de confianza de  $(-2/\sqrt{n}; 2/\sqrt{n}) \quad \forall k \geq 0$

**Tema de Discusión:**  
 Cómo será  $V(r_k)$  para una proceso en el cual  $\hat{\rho}_0 = 1$   
 $\hat{\rho}_1 = 0.4 \quad \hat{\rho}_j = 0$

**3.1.2 Procesos Autoregresivos AR (p)**

Una clase muy importante de los procesos estacionarios son los procesos autoregresivo, que resultan de imponer una dependencia lineal entre las variables del proceso similar a una ecuación de regresión.

$$Z_t = \delta_1 + \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \dots + \pi_p Z_{t-p} + a_t \quad (3.2)$$

Basados en la expresión (3.2) del modelo lineal general se expresa  $\{Z_t\}$  como:

$$Z_t = \delta + \underbrace{\phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p}}_{p\text{-términos autoregresivos}} + a_t \quad (3.3)$$

Donde:

- $\phi_i \rightarrow$  Parámetros  $i = 1, 2, \dots, p;$
- $\delta \rightarrow$  Constante;
- $a_t \rightarrow$  Ruido Blanco

Sea:  $\tilde{Z}_t = Z_t - \delta$

Bajo la expresión (3.2), el proceso  $\{Z_t\}$  cumple "siempre" el principio de invertibilidad, ya que  $\{Z_t\}$  en el modelo lineal general es invertible si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i < \infty \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 < \infty \quad ;$$

$$\sum \sum \pi_i \pi_j < \infty$$

Y según (3.3) al tener p - términos autoregresivos, se cumplen las tres condiciones. Sin embargo en el proceso  $\{Z_t\}$  "a veces" cumple el principio de estacionariedad.

**¿Cuándo  $\{Z_t\}$  será estacionario?**

$\{Z_t\}$  será estacionario cuando las raíces del polinomio característico están fuera del  $(-1, 1)$ , es decir:

$$\tilde{z}_t - \phi_1 \tilde{z}_{t-1} - \phi_2 \tilde{z}_{t-2} - \dots - \phi_p \tilde{z}_{t-p} = a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) Z_t = a_t$$

$$\tilde{z}_t = \left( \frac{1}{1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p} \right) a_t$$

(Polinomio característico)

Luego para que converja  $\left| \frac{1}{B} \right| > 1$ , entonces raíces estarán fuera de  $(-1, 1)$ , círculo unitario.

**Características de los procesos AR**

a. Proceso Autoregresivo de orden (1)

**1. Función de medias**

Tomando esperanzas a:

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + a_t$$

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + a_t$$

$$E(Z_t) = \phi_1 E(Z_{t-1}) + E(a_t) = \phi_1 E(Z_t)$$

$$\rightarrow (1 - \phi_1) E(\tilde{Z}_t) = 0$$

$$\rightarrow E(\tilde{Z}_t) = 0$$

**2. Función de Varianzas**

$$Var(Z_t) = E(Z_t)^2 = E(\phi_1 Z_{t-1} + a_t)^2 =$$

$$\phi_1^2 E(Z_{t-1}^2) + 2\phi_1 E(\tilde{Z}_{t-1} a_t) + E(a_t^2)$$

Como:

$$E(Z_{t-k} a_t) = 0; \quad E(Z_{t-k}^2) = \gamma_0;$$

$$E(a_t^2) = \sigma_a^2; \quad Var(Z_t) = \gamma_0$$

Entonces se tiene:

$$Var(Z_t) = \gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_a^2$$

$$\rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$$

**3. Función de autocovarianza**

Definimos a la autocovarianza como:  $\gamma_k$ ,

$k = 0, 1, \dots$

$k = 0$ , es la misma varianza, es decir:  $\gamma_0 = \sigma_Z^2$

$k = 1$ , tenemos  $\gamma_1 = E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-1})$

$$\gamma_1 = E((\phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + a_t) \tilde{Z}_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \phi_1 E(\tilde{Z}_{t-1}^2) + E(\tilde{Z}_{t-1} a_t)$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0$$

$k = 2$ , tenemos  $\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 = \phi_1^2 \gamma_0$

En general para  $k > 1$ ,  $\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0$

**4. Función de Autocorrelación**

Se sabe que  $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1$$

$$\rho_k = \phi_1^k, \quad \forall k > 1$$

**5. Representación de un proceso de un autoregresivo de orden 1**

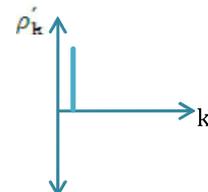
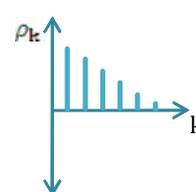


Figura 3.2 Autocorrelaciones      Figura 3.3 Autocorrelaciones Parciales

b. Proceso Autoregresivo de orden (2)

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

Escribiéndolo en términos del ruido blanco:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \tilde{Z}_t = a_t$$

$$\tilde{Z}_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)} a_t$$

$$\tilde{Z}_t = \left( \frac{1}{1 - H_1 B} \right) \left( \frac{1}{1 - H_2 B} \right) a_t; B = \frac{1}{H_i}$$

raíces del polinomio característico Buscamos que las raíces sean tales que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} H_i B \quad (3.4)$$

sea convergente. Luego (3.4) converge cuando las raíces  $\notin (-1, 1)$ , fuera del círculo unitario.

Para los AR(2) cuando esto se da, ocurre:

$$\begin{cases} |\theta_2| < 1 \\ \theta_2 - \theta_1 < 1 \\ \theta_1 + \theta_2 < 1 \end{cases} \text{ lo que equivale a decir que}$$

{Z<sub>t</sub>} es estacionario.

### 1. Función de medias

Tomando esperanzas a:

$$E(Z_t) = \phi_1 E(Z_{t-1}) + \phi_2 E(Z_{t-2}) + E(a_t) = \phi_1 E(Z_t) + \phi_2 E(Z_t)$$

$$\rightarrow (1 - \phi_1 - \phi_2) E(\tilde{Z}_t) = 0$$

$$\rightarrow E(\tilde{Z}_t) = 0$$

### 2. Función de autocovarianza

Definimos a la autocovarianza como:  $\gamma_k$ ,  
 $k = 0, 1, \dots$

$k = 0$ , es la misma varianza, es decir:  $\gamma_0 = \sigma_Z^2$

$k = 1$ , tenemos  $\gamma_1 = E(\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t-1}) = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1$

$k = 2$ , tenemos  $\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0$

$k = 3$ , tenemos  $\gamma_3 = \phi_1 \gamma_2 + \phi_2 \gamma_1$

En general para  $k > 2$ ,  $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$

### 3. Función de Autocorrelación

Se sabe que

$$\left. \begin{aligned} \rho_k &= \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \\ \rho_0 &= 1 \\ \rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \rho_k &= \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ecuación de} \\ \text{Yule \& Walker} \end{array}$$

### 4. Representación de un proceso de un autoregresivo de orden 2

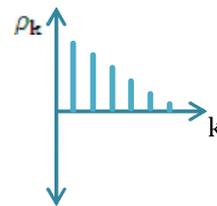


Figura 3.4 Autocorrelaciones

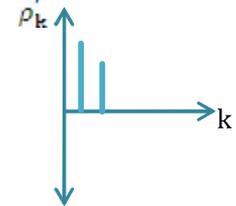


Figura 3.5 Autocorrelaciones Parciales

c. Proceso Autoregresivo de orden (p)

### 1. Función de medias

Tomando esperanzas a:

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$$

$$\Rightarrow E(Z_t) = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$$

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \delta \quad \Rightarrow \quad E(\tilde{Z}_t) = 0$$

Los AR (p) son siempre invertibles, y serán estacionarios cuando las raíces de

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{Z}_t = a_t$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^p (1 - B \sigma_i) \tilde{Z}_t = a_t$$

Sea tal que las raíces de  $\phi(B) \notin (-1, 1)$

## 2. Función de Varianzas

$$Var(\tilde{Z}_t) = \sigma_a^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \phi_2 \rho_2 - \dots - \phi_p \rho_p}$$

$$E(\tilde{Z}_{t-k} a_t) = 0; \quad E(\tilde{Z}_{t-k}^2) = \gamma_0;$$

$$E(a_t^2) = \sigma_a^2; \quad Var(\tilde{Z}_t) = \gamma_0$$

Entonces se tiene:

$$Var(\tilde{Z}_t) = \gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_a^2$$

$$\rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$$

## 3. Función de autocovarianza

Definimos a la autocovarianza como:  $\gamma_k$ ,

$$k = 0, 1, \dots$$

$k = 0$ , es la misma varianza, es decir:  $\gamma_0 = \sigma_a^2$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

## 4. Función de Autocorrelación

Se sabe que

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

## 5. Representación de un proceso de un autoregresivo de orden p

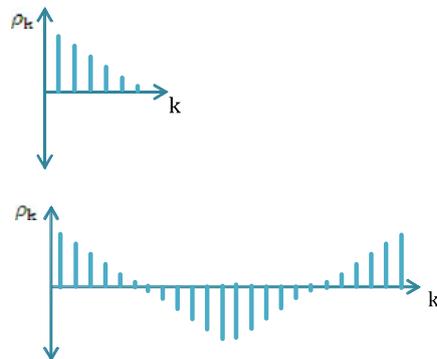


Figura 3.6 Autocorrelaciones

### 3.1.3 Procesos de Media Móvil MA (q)

Todo proceso débilmente estacionario de media cero que no contenga componentes determinística puede escribirse como una función lineal de variables aleatorias incorrelacionadas  $a_t$  como:

$$Z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots + \psi_q a_{t-q},$$

$$\psi_j = 0 \quad \forall j > q$$

$$Z_t = \psi(B) a_t \quad (3.5)$$

siendo  $\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots + \psi_q B^q$  un polinomio indefinido en el operador de retardo B. Y donde  $a_t \sim N(0, \sigma^2)$  y  $Cov(a_t, a_{t+k}) = 0, k = 1, 2, \dots$ ; llamaremos a (3.5) la representación lineal de un proceso estacionario no determinística.

Se denominan procesos de media móvil de orden q, MA(q) a aquellos casos particulares del proceso lineal general en los que únicamente los q primeros coeficientes son no nulos. Estos procesos serán siempre estacionarios.

El proceso MA(q) será entonces:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

esto es:  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$

un polinomio de grado q.

Luego MA(1) estaría representado por:

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$Z_{t-1} = a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2} \quad (3.6)$$

**¿Se cumple siempre que  $\{Z_t\}$  es un proceso invertible?**

Es invertible si las raíces de  $\theta(B)$  están fuera del círculo unitario (para  $1 - \theta_1 B$  polinomio característico) si esto se cumple, entonces  $|\theta_1| < 1$ .

### Características de los procesos MA

#### a. Proceso Media Móvil de orden (1)

##### 1. Función de medias

Tomando esperanzas a (3.6)

$$E(Z_t) = E(a_t) - \theta_1 E(a_{t-1}) = 0$$

##### 2. Función de Varianzas $\sigma_a^2$ a la varianza del proceso:

$$Var(Z_t) = Var(a_t - \theta_1 a_{t-1})$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2)$$

##### 3. Función de autocovarianza

Definimos a la autocovarianza como:  $\gamma_k$ ,

$$k = 0, 1, \dots$$

$k = 0$ , es la misma varianza, es decir:  $\gamma_0 = \sigma_z^2$

$k = 1$ , tenemos  $\gamma_1 = E(Z_t Z_{t-1})$

$$\gamma_1 = E((a_t - \theta_1 a_{t-1})Z_{t-1})$$

$$\gamma_1 = E(a_t Z_{t-1}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-1})$$

$$\gamma_1 = -\theta_1 \sigma_a^2$$

$k = 2$ , tenemos  $\gamma_2 = 0$

En general para  $k > 1$ ,  $\gamma_k = 0$

#### 4. Función de Autocorrelación

Se sabe que

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_k = 0, \quad \forall k > 1$$

#### 5. Representación de un proceso de media móvil de orden 1

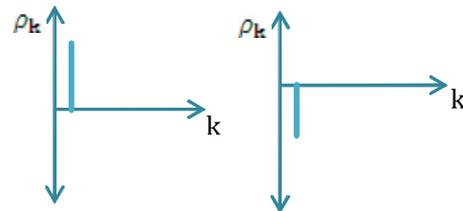


Figura 3.7 Autocorrelaciones

#### b. Proceso Media Móvil de orden (2)

##### 1. Función de Medias

Tomando esperanzas a

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Demuestre que  $Z_t$  es invertible se cumple:

i.  $|\theta_2| < 1$

i.  $\theta_1 + \theta_2 < 1$

i.  $\theta_2 - \theta_1 < 1$

$$E(Z_t) = E(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}) = 0$$

## 2. Función Autocovarianza

Definimos a la autocovarianza como:  $\gamma_k$ ,

$k = 0, 1, \dots$

$k = 0$ , es la misma varianza, es decir:  $\gamma_0 = \sigma_z^2$

$$\text{Var}(Z_t) = \text{Var}(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2})$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 + \theta_2^2 \sigma_a^2 = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

**Tema de Discusión** ¿Cómo será?

$$\gamma_1 = E(Z_t Z_{t-1}) \quad \text{para } k=1$$

$$\gamma_2 = E(Z_t Z_{t-2}) \quad \text{para } k=2$$

Si  $k = 3$ , tenemos  $\gamma_3 = 0$

En general para  $k > 2$ ,  $\gamma_k = 0$

**3. Función Autocorrelación.** Se sabe que

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Entonces tenemos:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$

$$\rho_k = 0, \quad \forall k > 2$$

**4. Representación de un proceso de media móvil de orden 2**

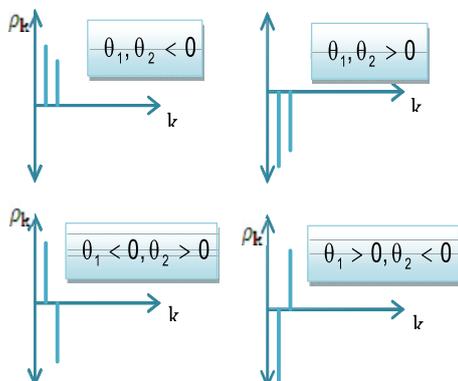


Figura 3.8 Autocorrelaciones

c. MA(q)

### 1. Función de medias

Tomando esperanzas a

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$E(Z_t) = E(a_t) - \theta_1 E(a_{t-1}) - \dots - \theta_q E(a_{t-q}) = 0$$

### 2. Función de autocovarianza

Definimos a la autocovarianza como:  $\gamma_k$ ,

$k = 0, 1, \dots$

$k = 0$ , es la misma varianza:

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \text{Var}(Z_t) = \text{Var}(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_a^2 + \theta_1^2 \sigma_a^2 + \dots + \theta_q^2 \sigma_a^2 = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$$

$k = 1, 2, \dots, q$  tenemos

$$\gamma_k = E(Z_t Z_{t-k}) = (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2$$

En general para  $k > q$ ,  $\gamma_k = 0$

**3. Función de Autocorrelación** Se sabe que

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2},$$

,  $k = 1, 2, \dots, q$

$$\rho_k = 0, \quad \forall k > q$$

**4. Representación de un proceso de media móvil de orden q**

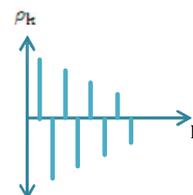


Figura 3.9 Autocorrelaciones

**Cuadro N° 3.1**  
**DIFERENCIAS ENTRE UN AR Y UN MA**

AR(p)	MA(q)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Siempre son invertibles.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• No siempre son invertibles.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• No siempre son estacionarios.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Siempre son estacionarios.</li> </ul>

**Observación:**

*De los AR(p) se puede pasar a MA(q), pero se debe verificar que los AR(p) sean estacionarios.*

*De los MA(q) no siempre se puede pasar a AR(p). Primero se debe verificar que los MA(q) sean invertibles.*

**3.1.4 Procesos Autoregresivos de Media Móvil ARMA (pq)**

El proceso ARMA (p, q) será:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t$$

o en notación compacta

$$\phi_p(B) \tilde{Z}_t = \theta_q(B) a_t$$

El proceso será estacionario si las raíces  $\phi_p(B) = 0$ , o están fuera del círculo unitario.

Será invertible si lo están las de  $\theta_q(B) = 0$ . Para obtener los coeficientes de  $\psi_i$  de la representación general MA ( $\infty$ ) escribiremos:

$$\tilde{Z}_t = \phi_p^{-1}(B) \theta_q(B) a_t = \psi(B) a_t$$

e igualaremos las potencias de B en

$$\phi_p(B) \psi(B) = \theta_q(B)$$

**a. ARMA(1,1)**

Un modelo frecuentemente usado es un ARMA (1, 1) donde p, q = 1, donde:

$$\phi(B) = 1 - \phi B \quad \text{y} \quad \theta(B) = 1 - \theta B$$

$$\tilde{Z}_t = \phi \tilde{Z}_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1}$$

Suponiendo estacionariedad  $E(Z_t) = 0$

k = 0

$$\gamma_0 = E(\tilde{Z}_t^2) = E(\phi_1 \tilde{Z}_{t-1} \tilde{Z}_t + a_t \tilde{Z}_t - \theta_1 a_{t-1} \tilde{Z}_t)$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \gamma_0(Za) - \theta_1 \gamma_1(Za)$$

$$\begin{aligned}
 k = 1 \\
 \gamma_1 &= E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-1}) = E(\phi_1 \tilde{z}_{t-1}^2 + a_t \tilde{z}_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} \tilde{z}_{t-1}) \\
 \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + 0 - \theta_1 \gamma_0(Z\alpha) = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \gamma_0(Z\alpha) \\
 k = 2 \\
 \gamma_2 &= E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-2}) = E(\phi_1 \tilde{z}_{t-1} \tilde{z}_{t-2} + a_t \tilde{z}_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} \tilde{z}_{t-2}) \\
 \gamma_2 &= \phi_1 E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-1}) + 0 - 0 = \phi_1 \gamma_1 \\
 k = 3 \\
 \gamma_3 &= E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-3}) = E(\phi_1 \tilde{z}_{t-1} \tilde{z}_{t-3} + a_t \tilde{z}_{t-3} - \theta_1 a_{t-1} \tilde{z}_{t-3}) \\
 \gamma_3 &= \phi_1 E(\tilde{z}_t \tilde{z}_{t-2}) + 0 - 0 = \phi_1 \gamma_2 = \phi_1^2 \gamma_1 \\
 k = j \\
 \gamma_j &= \phi_1^{j-1} \gamma_1 \quad \text{para } k > 1
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Los valores de  $\gamma_0(Z\alpha)$  y los  $\gamma_1(Z\alpha)$  son:

$$\gamma_0(Z\alpha) = \sigma_a^2 \quad \gamma_1(Z\alpha) = (\phi_1 - \theta_1) \sigma_a^2$$

Sustituyendo en  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + (1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)) \sigma_a^2 \\
 \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\gamma_0 = \frac{1 - 2\theta_1\phi_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2$$

Del mismo modo se obtiene los  $\rho_k$

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^{k-1}$$

**Observación:** las ecuaciones de los modelos AR, MA y ARMA pueden ser usadas para obtener estimaciones iniciales de los parámetros.

### b. ARMA (p,q)

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Donde  $E(Z_t) = 0$

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= \underbrace{\phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}}_{AR} + \\
 &\quad \underbrace{\gamma_{-k}(Z\alpha) + \gamma_{-k+1}(Z\alpha) + \dots + \gamma_{-k+q}(Z\alpha)}_{MA}
 \end{aligned}$$

pq valores no identificados, autocorrelaciones cruzadas

Donde:

$$\gamma_k(Z\alpha) = Cov(\tilde{z}_t a_{t-k}) = E(\tilde{z}_t a_{t-k})$$

$$\gamma_k(Z\alpha) = 0 \quad k < 0$$

$$\gamma_k(Z\alpha) \neq 0 \quad k > 0$$

Si los  $k > q$  la expresión  $\gamma_k$  se simplifica así:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \tag{3.8}$$

Luego dividiendo (3.8) por  $\gamma_0$  se tiene

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \text{es decir se}$$

llega a una expresión lineal:

$$\phi(B) \rho_k = 0 \tag{3.9}$$

La función de autocorrelación de un modelo ARMA (p, q) es una mezcla de exponenciales y sinusoidales en caída a partir del Lag q-p+1. Esta forma está determinada por las raíces de (3.9).

Los q primeros valores  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$  dependen de los parámetros autoregresivos y de medias móviles a través de la ecuación (3.8).

La condición de estacionariedad hacen que las raíces de  $\phi(B)$  estén fuera del círculo unitario, y la condición de invertibilidad hace que las raíces de  $\theta(B)$  estén fuera del círculo unitario.

Ejemplo de un ARMA (1,1)

$$Z_t = 0.6 Z_{t-1} + a_t - 0.8 a_{t-1}$$

$$\phi_1 = 0.6 \quad \theta_1 = 0.8$$

$$\underbrace{|\phi_1| < 1}_{\text{es estacionario}} \quad \underbrace{|\theta_1| < 1}_{\text{es invertible}}$$

las raíces de  $\phi(B) = 0$

$$\in (-1,1)$$

$$\phi(B) = 1 - 0.6B = 0$$

$$B = \frac{1}{0.6} > 1$$

las raíces de  $\theta(B) = 0$

$$\in (-1,1)$$

$$\theta(B) = 1 - 0.8B = 0$$

$$B = \frac{1}{0.8} > 1$$

Luego se prueba que es estacionaria e invertible.

- El término constante en los modelos ARMA, AR y MA

Hemos partido de que  $E(Z_t) = 0$  para todos los modelos; sin embargo, podemos hallar  $E(Z_t) = \mu \neq 0$ , en este caso se prefiere modelar sin constante por el principio de parsimonia (modelos con números de parámetros) en consecuencia se procede a restar la constante y se obtiene:

$$\phi_p(B) \tilde{Z}_t = \theta_q(B) a_t,$$

donde  $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$

Entonces tenemos:  $\phi_p(B) \tilde{Z}_t = \theta_0 + \theta_q(B) a_t$

forma general para  $\mu \neq 0$  y donde:

$$\theta_0 = \phi_p(B)\mu = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)\mu$$

### 3.1.5 Procesos No Estacionarios ARIMA (p,d,q)

Cuando no tenemos una serie estacionaria tratamos de volverla estacionaria mediante transformaciones. Una transformación muy usada es la logarítmica; sin embargo, no es la única ni siempre es la mejor. En el capítulo I se citó la familia de transformaciones de Box &Cox mediante las cuales se trata de conseguir estacionariedad por variabilidad. No obstante, cuando la falta de estacionariedad se presenta por nivel (presencia de tendencia determinística) se trata de conseguir estacionariedad mediante la aplicación de "d" diferencias finitas. Se espera que el efecto de las diferencias actúe según el siguiente gráfico:

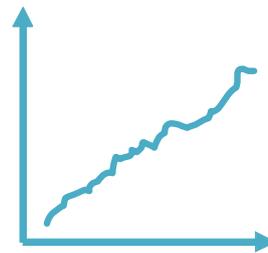


Figura 3.10 Tendencia creciente

Tendencia lineal creciente - Yt

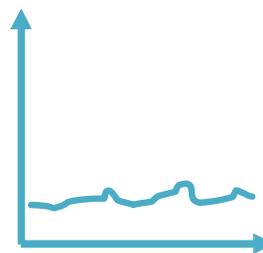


Figura 3.11 Tendencia constante

Tendencia estable luego de aplicar "d=1" diferencias:  $\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$

Luego los modelos ARIMA(p,d,q) son de la forma:

$$\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)a_t$$

$\nabla^d$  recibe el nombre de operador de diferencias de orden "d", el valor d indica el número de diferencias que se ha aplicado a  $Z_t$  para estabilizar su nivel. De esta manera:

$$\nabla^1 Z_t = \nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

$$\nabla^2 Z_t = \nabla(\nabla Z_t) \text{ y así sucesivamente.}$$

Las diferencias pueden ser consideradas como una transformación a la serie original  $Z_t$ , de tal forma que una vez aplicadas, el proceso de modelización se realiza con la nueva serie "diferenciada".

Por el principio de parsimonia, se acostumbra trabajar con  $d \leq 3$ . No siempre la aplicación de diferencias garantiza que  $Z_t$  se convierta en estacionaria. La sobre diferenciación puede acarrear peores consecuencias que trabajar con los datos originales. Lo más adecuado es aplicar las diferencias de manera paulatina e ir verificando si al hacerlo se consiguen modelos estacionarios e invertibles.

Ejemplo:

Sea  $\phi_1 = 0.8$

**(1-0.8B) ∇Z<sub>t</sub> = a<sub>t</sub> ..... Modelo ARIMA (1,1,0) estacionario (φ<sub>1</sub> = 0.8 < 1)**

desarrollando este modelo para buscar su forma original, sin diferencias se tiene:

$$Z_t = (1+0.8) Z_{t-1} - 0.8 Z_{t-2} + a_t$$

**Z<sub>t</sub> = 1.8 Z<sub>t-1</sub> - 0.8 Z<sub>t-2</sub> + a<sub>t</sub> ..... Modelo ARMA (2,0) no estacionario**

**Tarea:** verificar de manera práctica que este modelo no es estacionario.

**Nota:** Los procesos no estacionarios homogéneos son aquellos que no son estacionarios pero que pueden ser convertidos en estacionarios mediante diferencias finitas. En este caso, las raíces se encuentran sobre el círculo unitario.

**Tema de Discusión:**  
¿Y qué pasa si las raíces caen dentro del círculo unitario?

### 3.1.6 Procesos Estacionales SARIMA

Para  $Z_t$  proceso con comportamiento estacional de orden S (S = 12, 6, 4, 3, ...) es evidente que además de la relación de cada observación de la serie respecto a su pasado inmediato anterior, existe una relación de meses o trimestres (etc) año a año, de esta forma la relación mencionada puede ser expresada mediante el siguiente modelo:

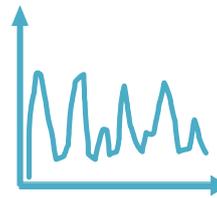
$$\phi(B)_s \nabla_s^D Z_t = \theta(B) a_t$$

Los  $a_t$  del modelo anterior no son propiamente ruido blanco, por ello pueden ser expresados como:

$$\phi(B) \nabla^d \alpha_t = \theta(B) a_t$$

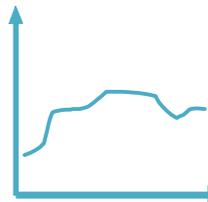
Ejemplo:

a)



$$\phi(B)_s \nabla_s^D Z_t = \theta(B) a_t$$

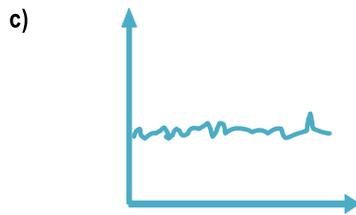
b)



Luego de modelar la parte estacional queda  $\alpha_t$  que no es ruido blanco y puede ser modelada como:

$$\phi(B) \nabla^d \alpha_t = \theta(B) a_t$$

Y luego recién debe quedar expresado en términos del ruido blanco  $a_t$



Por ello el modelo SARIMA (p,d,q)(P,D,Q)<sub>S</sub> se plantea de forma implícita como:

$$\Phi(B^S)\phi(B)\nabla_S^D\nabla^d Z_t = \Theta(B^S)\theta(B)\alpha_t$$

Donde S = Orden de la estacionalidad y  $Z_t \rightarrow (p, d, q)(P, D, Q)_S$

Los modelos de Box y Jenkins buscan expresar la relación entre los valores que toma la variable en los diferentes tiempos. Cuando un proceso es estacional tenemos dos tipos de relaciones que presentan. Un modelo estacional es deseable que represente la relación que existe entre los tiempos similares de diferentes periodos.

Por ejemplo: si el patrón estacional abarca un año y los datos están dados para cada mes, se deseara un modelo que relacione los meses de Enero a lo largo de los años, por ejemplo en ARIMA (P, D, Q)

$$\Phi_P(B^{12})\nabla_{12}^D Z_t = \Theta_Q(B^{12})\alpha_t \quad (3.10)$$

Otro modelo similar que relacione todos los Febreros

$$\Phi_P(B^{12})\nabla_{12}^D Z_{t+1} = \Theta_Q(B^{12})\alpha_{t+1}$$

Y así sucesivamente hasta tener 12 modelos, pero podemos suponer que estos modelos son en esencia el mismo, es decir, que el modelo (3.10) es válido para los 12 meses.

Pero no sólo existe una relación entre meses (tiempos) similares de diferentes años (periodos) si no que también deseamos representar la relación entre los meses sucesivos.

Dicho de otra forma, el modelo (3.10) que relaciona a los meses similares dentro de año a año no nos está diciendo todo lo explicable del comportamiento de la  $Z_t$  variable, por ello los  $\alpha_t$  no constituyen un ruido blanco y necesitamos ajustarles un modelo.

Si las series estacionales no son modeladas mediante un SARIMA, tendríamos modelos ARIMA de orden bastante alto.

Para caracterizar un SARIMA se trabaja la parte regular incluyendo el estudio de invertibilidad, estacionariedad, con posibilidades de aplicar diferencias regulares para estabilizar la tendencia.

Además se caracteriza la parte estacional incluyendo el estudio de invertibilidad, estacionariedad, con posibilidad de aplicar diferencias estacionales para estabilizar los "ciclos".

### 3.2 Identificación

El problema de identificación consiste en: conociendo nuestra serie inferir qué proceso la ha generado.

Para ello es necesario conocer cuál es el patrón de comportamiento de los procesos y tratar de identificar con la serie de cuál podría provenir. Las herramientas descriptoras del patrón de comportamiento del proceso son básicamente:

- Autocorrelaciones simples estimadas
- Autocorrelaciones parciales estimadas

#### a. Autocorrelaciones simples estimadas ( $\hat{\rho}_{1k}$ ):

En la sección anterior, hemos desarrollado la relación que existe entre la función de autocovarianza y la función de autocorrelación. En la fase de identificación haremos uso de las autocorrelaciones simples estimadas  $\hat{\rho}_k = c_k$  que presentan

un esquema de comportamiento que se visualiza con el correlograma. En este gráfico, se muestran las primeras  $k$  autocorrelaciones ( $k = n/4$ ), calculadas de la siguiente manera:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2}$$

por ello observando el correlograma podemos identificar con cierta aproximación el proceso del cual proviene la serie.

**b. Autocorrelaciones Parciales ( $\hat{\varphi}_{kk}$ ):** El correlograma de las parciales grafica los valores del primer parámetro estimado después de ajustar la serie a AR (1), AR (2), AR (3),.... y así en orden sucesivos, al margen que el proceso sea de tipo AR o no.

**Tema de Discusión:**  
 ¿Por qué serán válidas sólo las  $k = n/4$  primeras autocorrelaciones en la identificación?

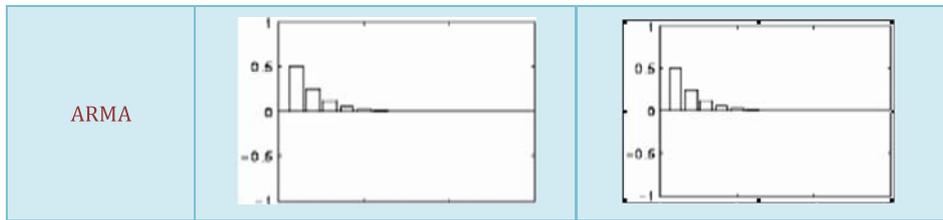
$$\hat{\varphi}_{kk} = \begin{cases} r_1, & k = 1 \\ \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\varphi}_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\varphi}_{k-1,j} r_j}, & k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

La forma como se disponen las  $\hat{\rho}_k$  en el correlograma se diferencian de cada proceso,

Con  $\hat{\varphi}_{kj} = \hat{\varphi}_{k-1,j} - \hat{\varphi}_{kk} \hat{\varphi}_{k-1,k-j}; j = 1, 2, \dots$

**Gráfico N° 3.1**  
**ESQUEMA DE AUTOCORRELACIONES PARA LA IDENTIFICACIÓN AR, MA, ARMA:**

PROCESOS	$\hat{\rho}_k$	$\hat{\varphi}_{kk}$
AR		
MA		



**Recordemos:**

1. Las TNL (esquema de Box &Cox) se aplican para conseguir estacionariedad por variabilidad. De ser necesario deben aplicarse al inicio.
2. El ARIMA es un ARMA con "d" diferencias cuando no se cumple estacionariedad por nivel. Luego la decisión de aplicar diferencias (así como las TNL) se hace al inicio.
3. Cuando es necesario estabilizar la serie por variabilidad y por nivel, primero se estabiliza

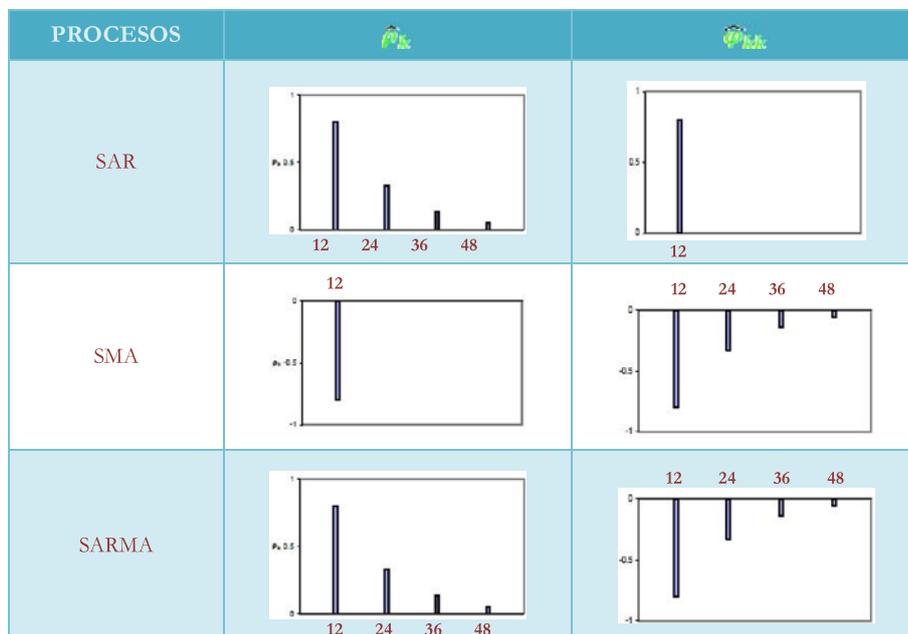
por variabilidad mediante TNL. Y sólo después se estabiliza por nivel aplicando diferencias de orden "d". Este orden garantiza que los pronósticos puedan ser re-transformados a la base original.

4. Los SARIMA corresponde en la fase de identificación a trabajar en dos partes:

Parte regular + Parte estacional

Antes de autocorrelación de orden S    Después de autocorrelación de orden S

**Grafico N° 3.2**  
**ESQUEMA DE AUTOCORRELACIONES PARA LA IDENTIFICACIÓN SAR, SMA, SARMA**



Tanto en la parte regular como en la parte estacional, las autocorrelaciones deben decrecer rápidamente cuando la serie es estacionaria.

Las autocorrelaciones identificables que nos permiten ver de qué proceso proviene la serie; son aquellas que escapan, como patrón, de las bandas de confianza.

**Cuadro Nº 3.2**  
**Resumen de Identificación**

	AR	MA	ARMA
<b>FORMA DEL MODELO</b>	$\varphi(B) Z_t = a_t$ $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$	$Z_t = \theta(B) a_t$ $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$	$\varphi(B) Z_t = \theta(B) a_t$
<b>CONDICION DE ESTACIONARIEDAD</b>	Raíces de $\varphi(B)=0$ Fuera del círculo unitario	Siempre es estacionaria	Raíces de $\varphi(B)$ fuera del círculo unitario
<b>CONDICION DE INVERTIBILIDAD</b>	Siempre son invertibles	Raíces de $\theta(B)=0$ fuera del círculo unitario	Raíces de $\theta(B)=0$ fuera del círculo unitario
<b>FAC</b>	Mixtura de exponenciales o sinusoidales que decaen rápidamente	Apenas q primeros valores no son nulos.	Mixtura de exponencial con o sin sinusoidales que decaen por los p-q términos.
<b>FACP</b>	Apenas p primero valores fuera de las bandas de confianza	Dominada por mixtura de exponenciales o sinusoidales que decaen rápidamente.	Dominada por mixtura de exponenciales o sinusoidales por q-p primeros retardos.

Un mismo proceso puede ser representado con varios modelos diferentes pero al introducir la restricción de "estacionario" e "invertible" las posibilidades se reducen.

Ejemplo:  $Y_t = Y_{t-1} + \theta_1 a_{t-1} + a_t$  es un proceso mixto ARMA (1,1) pero no estacionario, si queremos representarlo por un modelo estacionario este sería  $\nabla Y_t = \theta_1 a_{t-1} + a_t$

El método de identificación a partir de las autocorrelaciones muestrales propuesto por Box&Jenkins, depende en gran medida de la habilidad y experiencia del investigador.

Akaike ha propuesto un método alternativo de identificación que minimiza la participación humana. Este se basa en estimar los parámetros de una amplia gama de modelos ARIMA (p,d,q) para diferentes combinaciones de p, d y q, luego calcular el error estándar de la predicción para cada una de ellas. Finalmente se elige aquel con el cual se minimice la función AIC definida como:

$$AIC = -2 \text{Log (máxima verosimilitud)} + 2 (\text{Nº de parámetros del modelo})$$

Que puede ser vista como una formalización del criterio de parsimonia.

Dado que se encontró que este criterio no era consistente ya que cuando n crece se incrementa también el número de parámetros (no siempre de manera necesaria), Akaike propuso el siguiente criterio:

$$BIC = AIC + r (\log (r-1)) + r (\log c(r) 1/r) \dots\dots$$

donde c(r) es un polinomio

Así para los modelos:

**ARMA (p,q)**

$$AIC (p,q) = \log \hat{\sigma}_a^2 + \frac{(p+q)}{n} \log(n)$$

$$BIC (p,q) = \log \hat{\sigma}_a^2 + \frac{2(p+q)}{n} \log(n)$$

**ARIMA (p,d,q)**

$$AIC(p,d,q) = n \log \hat{\sigma}_a^2 + \left\{ \frac{n}{n-d} \right\} 2 (p+q+1+\delta_{d_e})$$

$$\delta_{d_e} = \begin{cases} 1 & d = 0 \\ 0 & d \neq 0 \end{cases}$$

$$BIC(p,q) = \log \hat{\sigma}_a^2 + \frac{2}{n-d} (p+q+1+\delta_1(d,0)) \log(n-d)$$

**Función de Autocorrelación Inversa:**

Sea  $Y_t$  una serie con función de autocovarianza

y autocorrelación:  $\rho_k = \frac{Y_k}{Y_0}$

Una función generatriz de autocovarianzas está

definida como  $\Gamma(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k \omega^k$

Una función generatriz de autocorrelaciones es:

$$P(w) = \frac{\Gamma(w)}{Y_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k \omega^k$$

Definimos una función generatriz de autocovarianza inversa de retardo k y denotada por  $Y_{Ik}$  para  $\Gamma I(w)$  tal que  $\Gamma I(w) \Gamma(w) = 1$

El coeficiente de  $w^k$  en  $\Gamma I(w)$  es llamado "coeficiente de autocovarianza inversa de retardo k"

El coeficiente de autocorrelación inversa, denotado por  $\rho_{Ik}$  está definido como:

$$\rho_{Ik} = \frac{Y_{Ik}}{Y_{I0}}$$

**Propiedades:**

1. La FACI de un ARIMA (p,d,q) es la misma que la fac de una ARIMA(p,d,q)
2. La FAC de AR(p) es una mixtura de exponenciales y/o sinusoidales y es difícil de interpretar. Por contraste la FACI se anula a partir de "p" lags, como sucede con la FAC de un MA(p).

Luego la FACI de un AR(p) tiene la misma forma que la FAC de una MA(q) y se presenta como:

$$\rho_{Ik} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\theta_k + \sum_{j=1}^{p-k} \theta_j \theta_{j+k} & k = 1, \dots, P \\ 0 & k > p \end{cases}$$

**Ejemplo:**

Para un AR(1)

$$\rho_{Ik} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\theta_1 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

3. La FACI de un MA(q) tiene la misma forma que una FAC de un AR(q), es decir, presenta la forma de exponenciales y/o sinusoidales que decaen hasta desaparecer.

**Ejemplo:**

Para un MA(1):

$$\rho_{Ik} = (-\theta_1)^k$$

4. La FACI de un ARMA(p,q) tiene la misma forma de la FAC de un modelo ARMA(p,q). Es decir, presenta una mixtura de exponenciales o sinusoidales que decaen excepto las primeras p-q autocorrelaciones cuyo patrón es no definido.
5. La FACI de un SARIMA (p,d,q) (P,D,Q)S tiene la misma forma que la FAC del modelo SARIMA.

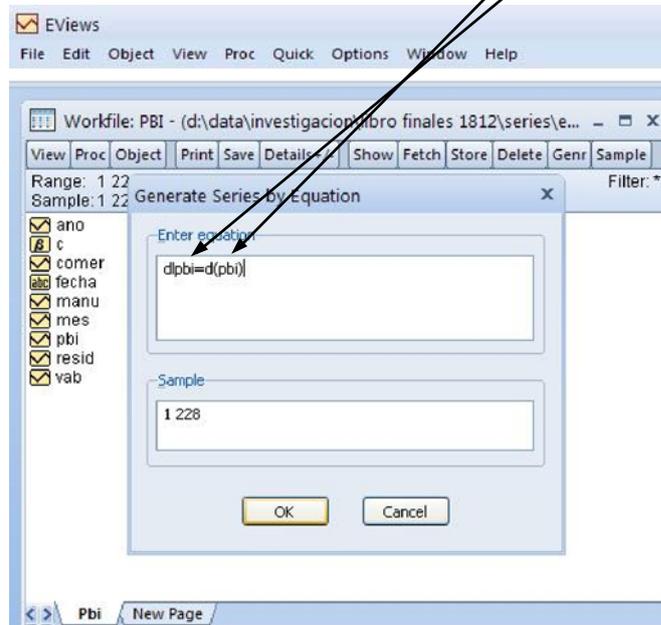
**APLICACIÓN:** Haciendo uso del programa EVIEWS 7.0 identificamos el modelo más adecuado para la serie PBI.

Como se vio en la aplicación anterior al analizar la gráfica de las autocorrelaciones de la serie original corresponde a una serie "no estacionaria" por nivel.

En consecuencia, primero procederemos a aplicar 1 diferencia regular.

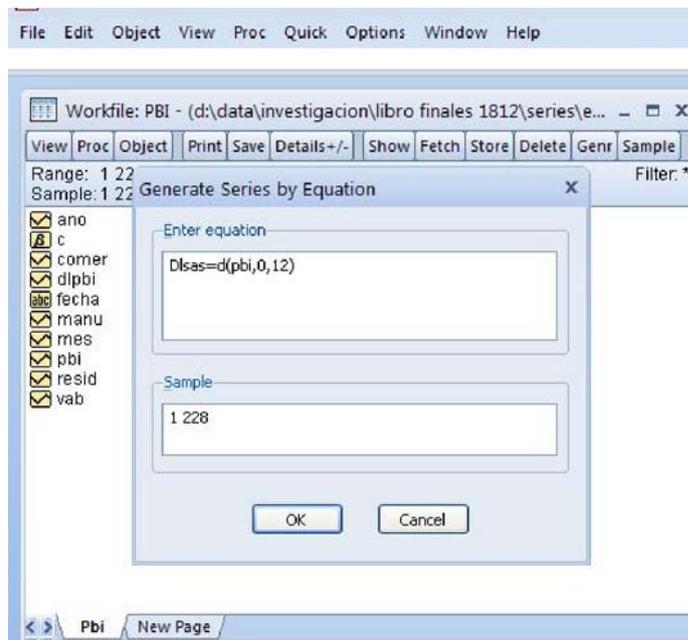
Ingreso a la opción GENS (GENERATE SERIES BY EQUATION) y en la ventana que se presenta especificamos la ecuación, en la cual aparece

el nombre de la serie con 1 diferencia regular ( $d1pbi$ ), y la aplicación de esta diferencia ( $d(pbi)$ )



Apliquemos también 1 diferencia en la parte estacional: Ingreso a GERN y en la ventana que aparece, especificó el nombre de la serie con 1

diferencia estacional (D1SAS) y la aplicación de 1 diferencia estacional ( $d(pbi,0,12)$ )



Luego seleccionamos QUICK/ SERIES STATISTICS/ CORRELOGRAM. Y especificamos el nombre de la serie con diferencia regular y diferencia estacional (no olvidar indicar n/4, que en este caso es 50) para indicar el número de autocorrelaciones válidas para la identificación.) El resultado se muestra a continuación.

Correlogram of DPBIS					
Date: 03/21/10 Time: 23:30					
Sample: 1 228					
Included observations: 215					
Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.443	-0.443	42.693	0.000	
2	0.041	-0.193	43.059	0.000	
3	0.086	0.029	44.702	0.000	
4	-0.054	0.015	45.344	0.000	
5	0.009	0.001	45.380	0.000	
6	0.087	0.102	47.055	0.000	
7	-0.120	-0.041	50.284	0.000	
8	-0.011	-0.107	50.312	0.000	
9	0.144	0.091	55.029	0.000	
10	-0.177	-0.088	82.170	0.000	
11	0.168	0.095	88.658	0.000	
12	-0.242	-0.214	82.163	0.000	
13	-0.005	-0.224	82.170	0.000	
14	0.038	-0.138	82.612	0.000	
15	-0.007	-0.036	82.524	0.000	
16	-0.022	0.028	82.640	0.000	
17	0.034	0.038	82.912	0.000	
18	-0.029	0.028	83.106	0.000	

El gráfico de las autocorrelaciones simples muestra la autocorrelación de orden 1 y la autocorrelación 10 fuera de las bandas de confianza. Luego para la parte regular se identifica un MA(1) MA(10). En la parte estacional aparece solo 1 autocorrelación simple que escapa ligeramente de las bandas de confianza. Por lo tanto en la parte estacional se identifica un SMA(1).

### 3.3 Estimación del Modelo

A partir de la serie  $Z_t$  se ha identificado un modelo, usando las autocorrelaciones simples y las parciales, que nos puede llevar a reproducir el proceso  $Z_t$  que lo generó.

El problema ahora es estimar los parámetros de dicho modelo.

El estimar los parámetros de un modelo ARIMA es un problema de estimación no lineal y por lo tanto no se puede hacer de forma directa sino por métodos iterativos, por ello se lleva a cabo en dos etapas:

- 1º Estimación preliminar
- 2º Estimación máximo verosímil

#### 3.3.1 Estimación Preliminar:

La estimación preliminar se realiza tomando en cuenta la relación entre los parámetros y las autocorrelaciones de los procesos.

Al reemplazar las autocorrelaciones  $\rho_k$  de cada modelo por las autocorrelaciones estimadas  $r_k$  de la serie se forman ecuaciones

a partir de las cuales deducimos los estimadores de los parámetros.

#### Ejemplo:

Usando el correlograma simple y el correlograma parcial, se identifica el modelo (0, 1,1). Para este modelo, se tiene que la primera autocorrelación es de la forma:

$$\rho_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2}$$

Reemplazando por las autocorrelaciones estimadas a partir de la serie, tendremos:

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2} \quad 0.09 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2}$$

Resolvemos la expresión para

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(0.09)(0.09)}}{2(0.09)}, \text{ luego}$$

$$\hat{\theta}_1 = -0.09 \text{ ó } -11.02$$

Pero como requerimos que las raíces del polinomio característico caigan fuera del círculo unitario y de esta manera admitir que  $Z_t$  con 1 diferencia regular es estacionario, debe cumplirse que  $\hat{\theta}_1 = -0.09$   
 Esta estimación preliminar se convierte en la estimación inicial a partir de la cual, de manera

iterativa se realizará la estimación máximo verosímil.

En el clásico libro de Box & Jenkins, se presenta una tabla que reúne pautas importantes para la identificación y estimación preliminar. Nos hemos basado en esa tabla para presentar la siguiente:

**Cuadro N° 3.3**  
**Resumen de Identificación**

MODELO	(1,d,0)	(0,d,1)	(1,d,1)
Autocorrelaciones	Decaen exponencialmente (o sinusoidalmente)	Sólo la primera es diferente de cero	Decaen exponencialmente (o sinusoidalmente)
Autocorrelaciones parciales	Sólo la primera es diferente de cero	Decae exponencialmente (o sinusoidalmente)	Decae exponencialmente (o sinusoidalmente)
Estimación preliminar de los parámetros	$\hat{\phi}_1 = \gamma_1$	$\gamma_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2}$	$\gamma_1 = \frac{(1 - \hat{\theta}_1 \hat{\phi}_1)(\hat{\phi}_1 - \hat{\theta}_1)}{-1 + \hat{\theta}_1^2 - 2\hat{\phi}_1 \hat{\theta}_1}$ $\gamma_2 = \gamma_1 \hat{\phi}_1$
Región admisible para las raíces del Polinomio característico	$-1 < \theta_1 < 1$	$-1 < \theta_1 < 1$	$-1 < \theta_1 < 1$ $-1 < \theta_1 < 1$

MODELO	(2,d,0)	(0,d,2)
Autocorrelaciones	Decaen exponencialmente (o sinusoidalmente)	Sólo las dos primeras autocorrelaciones diferentes de cero
Autocorrelaciones parciales	Sólo las dos primeras son diferente de cero	Decae exponencialmente (o sinusoidalmente)
Estimación preliminar de los parámetros	$\hat{\phi}_1 = \frac{\gamma_1(1 - \gamma_2)}{1 - \gamma_1^2}$ $\hat{\phi}_2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1^2}{1 - \gamma_1^2}$	$\gamma_1 = \frac{-\hat{\theta}_1(1 - \hat{\theta}_2)}{-1 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2}$ $\gamma_2 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2}$
Región admisible para las raíces del Polinomio característico	$-1 < \theta_2 < 1$ $\theta_2 + \theta_1 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$	$-1 < \theta_2 < 1$ $\theta_2 + \theta_1 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$

Adaptado del Libro Time Series Analysis - Box&Jenkins.

### 3.3.2 Estimación por Método de Máximo Verosimilitud

La función de densidad de  $a_t$  viene dada por:

$$f(a_t / \sigma_a^2, \beta, w^0, \alpha^0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\sigma_a^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} a_t^2 \right\}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (\sigma_a^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} (w_t + \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})^2 \right\}$$

La función de densidad conjunta para  $a_1, \dots$ , hipótesis están incorrelacionadas entre si, en consecuencia: será igual al producto de las funciones de densidad marginales, ya que estas variables por

$$f(a_t / \sigma_a^2, \beta, w^0, a^0) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\sigma_a^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum a_t^2 \right\}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\sigma_a^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum (w_t + \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})^2 \right\}$$

La maximización de la anterior función respecto a  $\alpha$  conduce a la obtención de unos estimadores máximo verosímiles. Ahora bien, maximizar la anterior función equivale a minimizar la sumatoria que aparece en la exponencial.

Bajo el enfoque no condicional los estimadores por mínimos cuadrados coinciden con los estimadores máximos verosímiles, a continuación se presentan los parámetros estimados bajo el enfoque no condicional por mínimos cuadrados.

### 3.3.3 Estimación por Método de Aproximación mínimo Cuadrática

Una alternativa a la estimación máximo verosímil es la estimación por aproximación a los mínimos cuadrados; sin embargo, al tratarse de modelos no lineales, se usarán aproximaciones de Taylor.

En el método de mínimos cuadrados los estimadores se obtienen minimizando:

$$S = \sum a_t^2$$

Bajo un modelo ARMA (p, q), at se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_t = w_t + \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

Considerando el vector  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p+q})'$   $= (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$

Y tomando la aproximación de Taylor se tendría:

$$a_t = a_t^0 - \sum_{i=1}^{p+q} (\beta_i - \beta_i^0) X_{it}^0$$

Donde:

$$X_{it}^0 = \left( -\frac{\partial a_t}{\partial \beta_i} \right) \Big|_{\beta_i = \beta_i^0}$$

Denotando:

$$X^0 = \begin{bmatrix} X_{11}^0 & X_{12}^0 & \dots & X_{1(p+q)}^0 \\ X_{21}^0 & X_{22}^0 & \dots & X_{2(p+q)}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1}^0 & X_{N2}^0 & \dots & X_{N(p+q)}^0 \end{bmatrix}$$

Podemos expresar  $a^0$  de la siguiente manera:

$$a^0 = X^0(\beta - \beta^0) + a$$

Donde los valores  $a^0$  y  $a$  constan de N elementos, luego la estimación de mínimos cuadrados es:

$$\widehat{\beta} - \beta^0 = (X^0 X^0)^{-1} X^0 a^0$$

**APLICACIÓN:** Haciendo uso del programa EViews 7.0 estime el modelo identificado para la serie PBI.

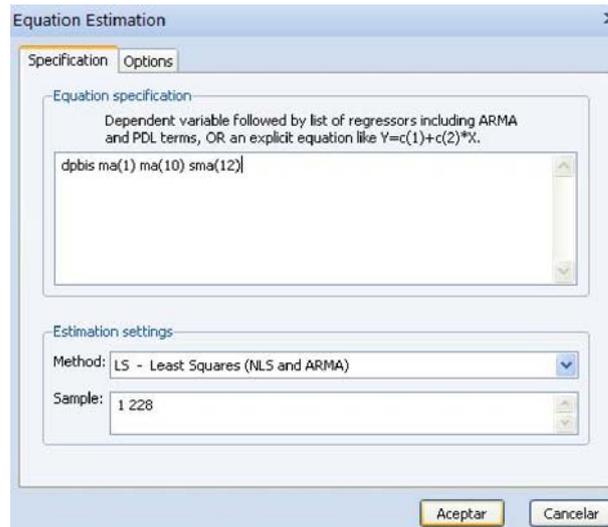
Ingresamos a la opción: QUICK/ ESTIMATE EQUATION

Escribimos la ecuación del modelo a ajustar en el campo "Equation Specification" de la pestaña "Specification"

estimación se realice mediante el método de mínimos cuadrados.

En el campo "Method" elijo: LS-LEAST SQUARE (NLS AND ARIMA) a fin que la

Se especifica una MA(1) MA(10) para la parte regular y SMA(12) para la parte estacional



Al aceptar, aparece la siguiente pantalla con el modelo estimado:

modelo son menores que 1. Por lo tanto, las raíces están fuera del círculo unitario y en consecuencia, el modelo es invertible.

Observemos que las inversas de las raíces del

Equation: UNTITLED Workfile: PBI:Pb\

View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: DPBIS  
 Method: Least Squares  
 Date: 03/21/10 Time: 23:36  
 Sample (adjusted): 14 228  
 Included observations: 215 after adjustments  
 Convergence achieved after 10 iterations  
 MA Backcast: -8 13

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.463590	0.062123	-7.462490	0.0000
MA(10)	-0.134978	0.059536	-2.267168	0.0244
SMA(12)	-0.701968	0.047149	-14.88844	0.0000

R-squared	0.421182	Mean dependent var	0.019070
Adjusted R-squared	0.415721	S.D. dependent var	4.014397
S.E. of regression	3.068529	Akaike info criterion	5.094129
Sum squared resid	1996.165	Schwarz criterion	5.141161
Log likelihood	-544.6189	Hannan-Quinn criter.	5.113132
Durbin-Watson stat	2.067793		

Inverted MA Roots				
.97	.88	.84-.49i	.84+.49i	
.72+.47i	.72-.47i	.49+.84i	.49-.84i	
.30-.77i	.30+.77i	.00+.97i	-.00-.97i	
-.21-.77i	-.21+.77i	-.49+.84i	-.49-.84i	

Comparando la estimación para este modelo con diferencias en la parte regular y estacional, con otro modelo podemos observar que las

estadísticas: log-likelihood (logaritmo de verosimilitud), Akaike, Schwarz y Hannan son más eficientes en el primero, por cuanto son menores.

**Otro modelo:**

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.603475	0.064906	9.297741	0.0000
AR(2)	0.395990	0.064947	6.097097	0.0000
MA(12)	-0.719200	0.043979	-16.35311	0.0000

R-squared	0.729037	Mean dependent var	6.174299
Adjusted R-squared	0.726469	S.D. dependent var	6.122900
S.E. of regression	3.202289	Akaike info criterion	5.179528
Sum squared resid	2163.732	Schwarz criterion	5.226715
Log likelihood	-551.2095	Hannan-Quinn criter.	5.198596
Durbin-Watson stat	2.196167		

Inverted AR Roots	1.00	-.40		
Inverted MA Roots	.97	.84+.49i	.84-.49i	.49+.84i
	.49-.84i	.00+.97i	-.00-.97i	-.49-.84i
	-.49+.84i	-.84-.49i	-.84+.49i	-.97

No recomendamos hacer la selección del mejor modelo usando los criterios del análisis de regresión (R-squared, t-statistics)

**3.4 validación de los Modelos:**

Esta fase es posterior a la identificación y estimación de los parámetros del modelo.

En esta, se analiza la adecuación entre el modelo y los datos, dicho de otra forma, es analizar en qué medida se cumplen los siguientes requisitos:

- " Los residuos del modelo estimado se aproximan al comportamiento del ruido blanco.
- " El modelo estimado es estacionario e invertible.
- " Los coeficientes están poco correlacionados entre si.
- " Los coeficientes del modelo son suficientes para representar la serie.
- " El grado de ajuste, a través de las estadísticas de prueba, es elevado a comparación al de otros modelos alternativos.

**Dóctimas para validación del Modelo:**

Ahora veamos si los residuos ajustados cumplen con los supuestos teóricos, es decir:

$$E(e_t) = 0$$

$$V(e_t) = \sigma^2$$

También:

$$E(e_t e_{t'}) = 0 \quad \forall t \neq t' ; \quad e_t \sim N(0, \sigma^2)$$

**¿Cómo debe ser  $e_t$  para validar el modelo?**

$e_t$  debe comportarse como ruido blanco ( $a_t$ ), luego  $e_t$  será incorrelacionado con  $e_{t-1} \approx 0$  debe ser pequeña y no deben de sugerir el Modelo  $f(w)$  constante cuando hemos conseguido con buen modelo.

Para empezar, debemos calcular los residuos

$$\hat{e}_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Calculamos las autocorrelaciones de los residuos

Docimamos si esas autocorrelaciones nos permiten aceptar que  $\hat{e}_t$  es un ruido blanco. Si la respuesta es afirmativa, podemos decir que el modelo es apropiado, de lo contrario debemos buscar otro modelo.

Al docimar las autocorrelaciones de los residuos:

$$H_0: \Gamma_{k,e_t} = 0$$

$$H_1: \Gamma_{k,e_t} \neq 0$$

Debemos considerar lo siguiente:

1. Cuando se tiene una serie se desea probar que proviene de un ruido blanco, estamos suponiendo que  $\rho_k = 0$  para  $k > r$  y si  $M$  es grande,  $Var(r_k) = 1/N$ , por lo cual las bandas de confianza están entre  $(-2/\sqrt{n}, 2/\sqrt{n})$

2. Cuando ya se ha ajustado un modelo la varianza de las autocorrelaciones de los residuos queda en función de los parámetros estimados del modelo. Para los valores altos de  $k$  sucede a menudo que  $Var(r_k) = 1/n$  pero en el caso de los valores bajos de  $k$   $var(r_k) < 1/n$ .

**Estadística de Prueba para docimar la validez del modelo:**

Box&Pierce en 1970 propusieron una estadística denominada:

Prueba de Box&Pierce  $Q = n$

$$Q = n \sum_{k=1}^m \hat{r}_k^2 \sim \chi_{m-p-q, 1-\alpha}^2$$

Se busca no Rechazar  $H_0$ .

Si  $Q > \chi_{m-p-q, 1-\alpha}^2$  se rechaza la hipótesis nula y por lo tanto los residuos no se pueden considerar ruido blanco. Con esta conclusión estamos demostrando que el modelo no es bueno ya que aún falta algo que no se ha modelado.

Otra estadística de utilidad es la de Box & Lundj, en la cual

$$Q = n(n+2)$$

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{r_k^2}{n-k} \sim \chi_{m-p-q, 1-\alpha}^2$$

*Quando se rechaza  $H_0$  algo se ha guardado sin modelar, el estudio de esos residuales, están encubriendo el comportamiento de la serie que no ha sido captado en el modelo*

**Prueba de Rachas**

La prueba de Rachas convierte el número total de rachas en un estadístico  $Z$  que sigue aproximadamente una distribución normal.

Cuanto mayor es el estadístico y menor por tanto el grado de significación, más probable que sea verdad la hipótesis alternativa ( $H_1$ ). Y al revés cuanto más pequeño sea el estadístico y mayor el grado de significación, más probable que sea verdad la Hipótesis nula ( $H_0$ ) de aleatoriedad de la distribución de las observaciones.

Para analizar si los datos son aleatorios se aplicara la prueba de Rachas:

En la cual las hipótesis son:

- $H_0$ : Los datos siguen una distribución aleatoria.
- $H_1$ : Los datos no son aleatorios

	Error for prodacidosulf from ARIMA, MOD_4 LN NOCON
Test Value <sup>a</sup>	,00537
Cases < Test Value	65
Cases >= Test Value	66
Total Cases	131
Number of Runs	75
Z	1,492
Asymp. Sig. (2-tailed)	,136

a. Median

Figura 3.12 Prueba de rachas

- $H_0$ : Los errores son aleatorios
  - $H_1$ : Los errores no son aleatorios
- $\alpha=0.05$ .

Vemos que según la prueba de Rachas los errores son aleatorios (no se puede rechazar  $H_0$ ), pues el p-valor es  $0.136 > \alpha=0.05$ .

**Prueba gráfica:**

Los gráficos de residuo versus el orden de los datos y gráfico de residuos vs. valor ajustado, deben mostrar que la varianza del residuo tendría varianza constante, por la forma aleatoria del comportamiento. Por otro lado el gráfico de normalidad p-plot de los residuales debe sugerir la diagonal de normalidad, tal como se muestra en el gráfico.

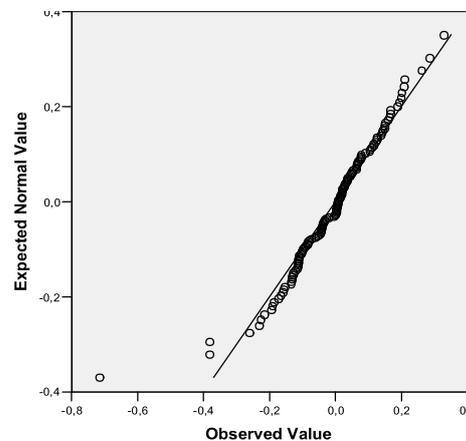


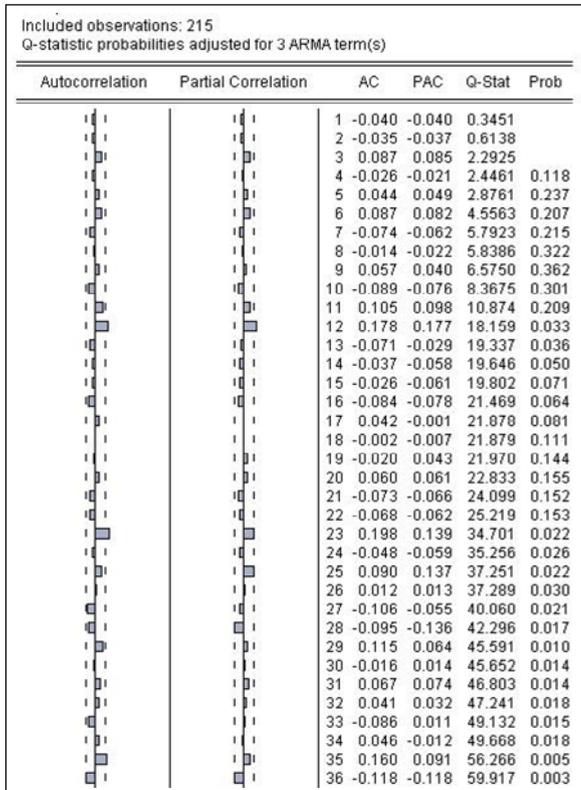
Figura 3.12 Gráfico de normalidad

El gráfico de normalidad nos muestra que los residuos del modelo se comportan como una normal.

**APLICACIÓN:** Haciendo uso del programa EVIEWS 7.0 valide el modelo hallado para PBI. Encontramos los valores y la gráfica de las autocorrelaciones residuales ingresando a la opción:

IEWS/ RESIDUAL TEST/ CORRELOGRAM Q/ STATISTICS inmediatamente después de haber estimado el modelo.

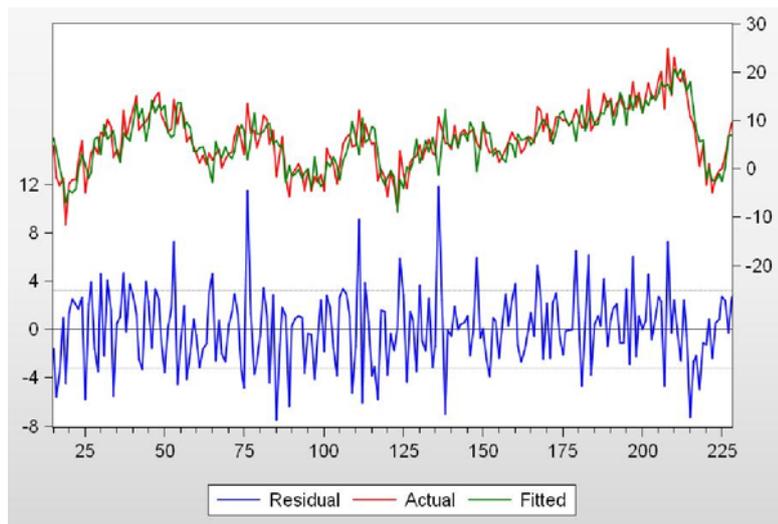
El resultado se muestra a continuación:



Observemos que todas la autocorrelaciones residuales simples, así como las autocorrelaciones parciales de los residuales, caen dentro de las bandas de confianza. Este es el típico comportamiento de un ruido blanco, con lo que se demuestra que el modelo representa todas las características de la serie.

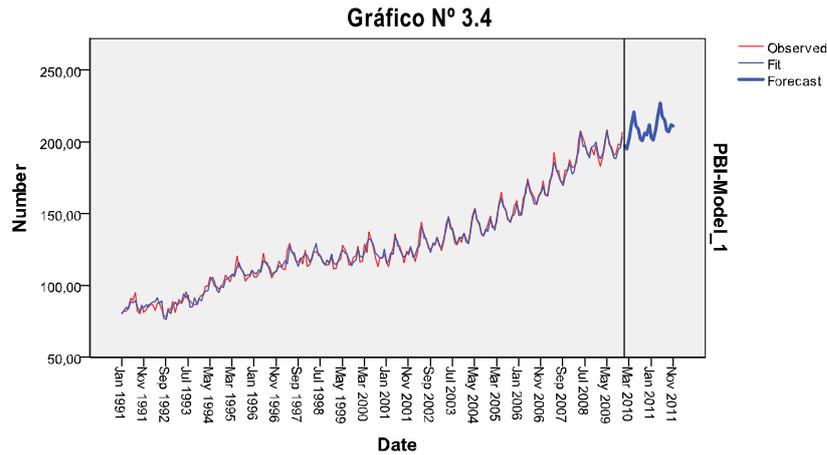
Finalmente usando la opción forecast, podemos presentar la serie original en contraste con la serie estimada. En la parte inferior, se muestran los residuos.

Gráfico N° 3.3



Recordemos que el modelo contiene 1 diferencia en la parte regular y 1 diferencia en la parte estacional, por ello los pronósticos no aparecen en la base original y será necesario re-transformar los datos. Una desventaja del

Eviews es justamente la necesidad de hacer la re-transformación. Este mismo modelo trabajado en el PASW es obtenido automáticamente en su base original como se muestra a continuación.



### 3.5 Análisis Espectral

Empecemos por definir el espectro como la transformada de Fourier de la función de autocovarianza de la serie  $Y_t$ .

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \left( \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(jw) \right) \quad (3.11)$$

La participación de la autocovarianza en su definición, debe hacernos ver la estrecha relación que existe entre el enfoque del dominio de frecuencias y el enfoque del dominio del tiempo (modelos ARIMA). De ahí que podemos usar el espectro en el proceso de identificación, debido a que para determinados procesos el espectro tiene una forma característica:

Por supuesto que no podemos dejar de mencionar la utilidad del espectro para explorar periodicidades ocultas en la serie.

Además, si recordamos, las autocovarianzas de un ruido blanco, salvo  $\gamma_0$  (varianza), todas las otras  $\gamma_j$  son cero por lo tanto el espectro de un ruido blanco sería:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sigma^2$$

Este resultado nos hace ver la utilidad del espectro en la validación de la modelización, ya que podemos encontrar el espectro de los residuos y esperar que se comporten como  $f(w)$  constante si es que provienen de un ruido blanco.

Al espectro dividido entre la varianza  $f(w)/\sigma^2$  se le llama función de densidad espectral y cumple propiedades similares a las de una función de densidad en probabilidades, es decir siempre toma valores positivos, la integral en el dominio de definición es 1.

También sirve como herramienta para analizar las consecuencias de cosas que se hacen en el dominio del tiempo como la aplicación de filtros (se puede averiguar lo que hacen las diferencias finitas, los promedios móviles y otros). En la literatura especializada se encuentran otros casos en que ayuda a trabajar en el dominio del tiempo en cuanto a demostraciones o a descubrir detalles o problemas.

**¿Cómo funciona el espectro?**

*El espectro "reparte" la varianza entre varias bandas de frecuencias haciéndonos ver cuáles son las más importantes.*

**¿Cómo estimar el espectro?**

**A partir de una serie  $Y_t$ :**

- a) Podemos reemplazar las autocovarianzas teóricas  $\gamma_j$  por las muestrales  $c_j$ .
- b) La suma va hasta  $\infty$  pero la covarianza más alta que podemos calcular es la de orden  $N-1$  (que estaría calculada solo con dos términos, el primero y el último)

Dando los dos pasos anteriores los espectros tenían la propiedad de ser muy variables (igual que los periodogramas), la primera sospecha de ser las causantes de esto cae por supuesto en las autocovarianzas de orden alto ya que son calculadas sobre la base de pocos términos ( $c_j$  considera dispone solo de  $N-j$  parejas de datos con que ser calculada). Luego, una idea coherente parece ser limitar el número de autocovarianzas que intervienen en el cálculo del espectro estimado. El estimador de (3.11) fue planteado entonces como:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \left( c_0 + 2 \sum_{j=1}^M c_j \cos(jw) \right)$$

pero aun así la excesiva variabilidad del espectro estimado daba problemas por lo que se decidió ponderar las  $M$  autocovarianzas que intervienen en el cálculo dando mayor peso a las primeras autocorrelaciones. Así el estimador del espectro en (3.11) sería:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \left( c_0 + 2 \sum_{j=1}^M \lambda_j c_j \cos(jw) \right) \tag{3.12}$$

Donde  $\lambda_j$  representa el peso a la  $j$ -ésima autocovarianza  $c_j$ .

Queda claro que la "función de densidad espectral" la podríamos estimar de forma similar a (3.12) pero utilizando autocorrelaciones en lugar de autocovarianzas.

Si observamos la expresión (3.12) veremos que para estimar el espectro de un proceso nos basta conocer las primeras  $M$  autocovarianzas de la serie y decidir que pesos  $\lambda_j$  utilizar.

Como el esquema de pesos que se elija para las  $c_j$  se relaciona con otro elemento del análisis espectral que se denomina 'ventana', se conoció como "carpintería de ventanas" a la definición de diferentes esquemas de ponderaciones, esto estuvo de moda en la década de los años 50. Hay varios esquemas de ponderaciones, algunos como el "Rectangular" (igual peso para todos) o el de Barlett producen excesiva variabilidad pero hay otros como el de Tukey y Parzen que son universalmente aceptados como buenos. Los pesos de Tukey y de Parzen son calculados de la siguiente forma:

**Tukey:**  $\lambda_j = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi j}{M}\right) \right)$ ,  
 $j = 0, 1, 2, \dots, M$

**Parzen:**

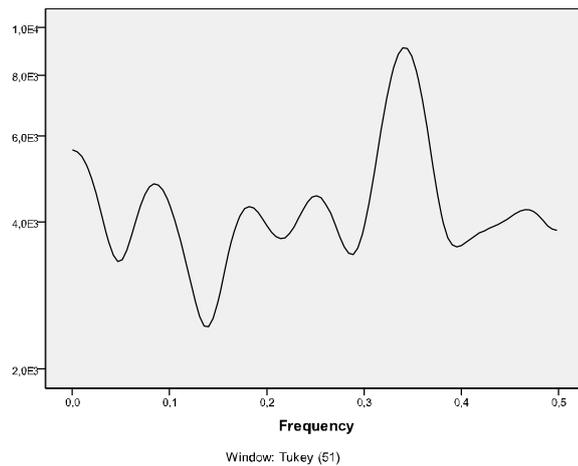
$$\lambda_j = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{j}{M}\right)^2 + 6\left(\frac{j}{M}\right)^3, & j = 0, 1, \dots, \frac{M}{2} \\ 2\left(1 + \frac{j}{M}\right)^3, & j = \left(\frac{M}{2}\right) + 1, \dots, M \end{cases}$$

**APLICACIÓN:**

Presente el espectro para los residuos de la serie PBI después de aplicado el modelo SARIMA (0,1,10)(0,1,1)<sub>12</sub>. Use la ventana de Tuckey.

El resultado es un espectro en el que prevalece la parte aleatoria, mientras que la tendencia y la estacionalidad no indican información de importancia para modelar. En consecuencia el modelo es apropiado.

**Gráfico N° 3.5**



**3.6 Aplicaciones del Enfoque de Dominio de Tiempo y Dominio de Frecuencias a Series Económicas**

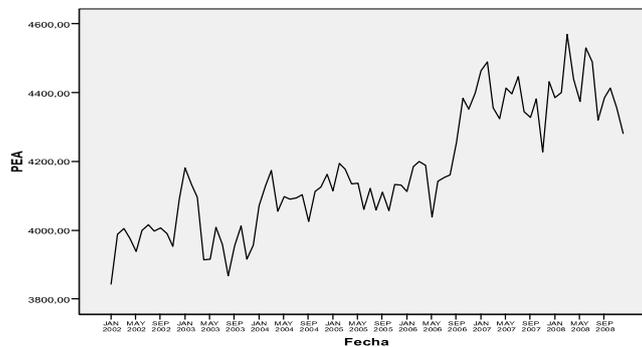
comparación, hemos querido presentar en este capítulo la modelización mediante ARIMA con ayuda del espectro para la validación del ajuste. En el enfoque de Dominio del tiempo, una de las principales condiciones a cumplirse es "la estacionariedad" tanto en variabilidad como en nivel.

**CASO N°1: POBLACIÓN ECONÓMICAMENTE ACTIVA TOTAL**

En el capítulo II se modeló esta serie mediante el enfoque de descomposición. Con fines de

**Gráfico N° 3.6**

**LIMA METROPOLITANA: POBLACIÓN ECONÓMICAMENTE ACTIVA, 2002-2008**

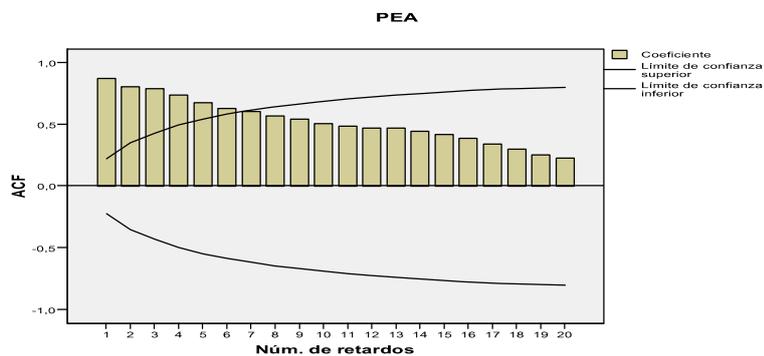


Fuente: INEI - EPE

Visualizando nuestro gráfico de series podemos ver que respecto a la tendencia, esta no es estable por lo que podría ser no estacionaria por nivel. Si realizamos el gráfico del correlograma vemos que tiene una caída exponencial muy lenta que nos confirma que

esta no cumple con ser estacionaria por nivel. Obsérvese además que en el gráfico no se aprecia estacionalidad. Sin embargo, se sabe que la serie presenta estacionalidad (ver análisis de descomposición).

**Gráfico N° 3.7**  
**LIMA METROPOLITANA: CORRELOGRAMA DE LA PEA, 2002-2009**

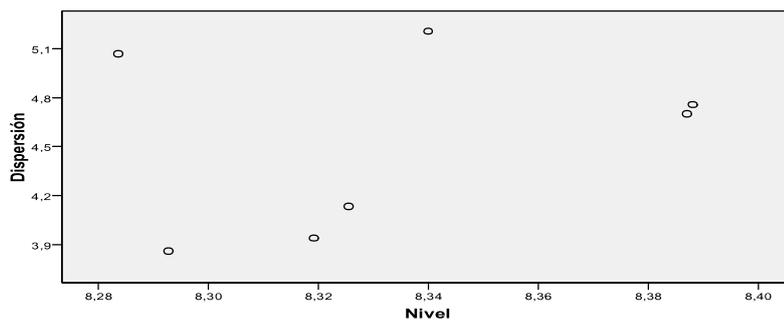


Fuente: INEI - EPE

Y con respecto a la variabilidad, una primera apreciación es su comportamiento casi regular. Para confirmar la estacionariedad por

variabilidad haremos uso del gráfico de Dispersión vs. Nivel.

**Gráfico N° 3.8**  
**LIMA METROPOLITANA: NIVEL VS DISPERSIÓN DE LA PEA, 2002-2009**

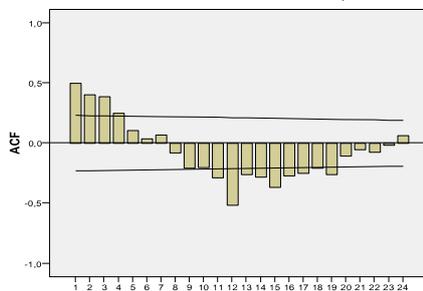


\* Gráfico de LN de dispersión por LN de nivel  
Inclinación = 3,691 Potencia para transformación = -2,691

Fuente: INEI - EPE

Como podemos ver en nuestro gráfico de dispersión vs nivel, vemos que los puntos se encuentran dispersos. Aún cuando el gráfico sugiere una potencia para transformación, prevalece nuestra apreciación y por lo tanto confirmamos que la serie es estacionaria en variabilidad y no necesita que se le aplique transformación para estabilizarla.

**Gráfico N° 3.9**  
**LIMA METROPOLITANA:**  
**CORREOGRAMA DE LA PEA, 2002-2009**



Fuente: INEI - EPE

Hace ahora su aparición el comportamiento estacional de la serie. Analizando la parte regular de las autocorrelaciones simples, identificamos un AR(p). Para determinar el valor de p, observamos el gráfico de autocorrelaciones parciales en su parte regular, en el cual sólo 1 autocorrelación está fuera de las bandas de confianza. Por lo tanto, se trata de un AR(1) en la parte regular.

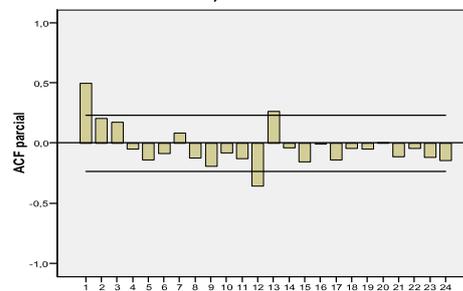
Para la parte estacional, observamos el gráfico de las autocorrelaciones simples a partir del retardo de orden S=12. Observamos el típico comportamiento SAR(P), y al complementar la identificación con el gráfico de las autocorrelaciones parciales encontramos que nuevamente sólo 1 autocorrelación estacional escapa de las bandas de confianza, por lo tanto se trata de un SAR(1).

De esta manera, el modelo SARIMA será (1,0,0) (1,2,0)<sub>12</sub>.

**MODELO PROPUESTO**

A fin de conseguir estacionariedad en nivel se aplicó dos diferencias en la parte estacional observando luego las autocorrelaciones simples y parciales:

**Gráfico N° 3.10**  
**LIMA METROPOLITANA:**  
**AUTOCORRELACIONES PARCIALES DE LA PEA, 2002-2009**



Fuente: INEI - EPE

**ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO:**

**ESTIMACIÓN PRELIMINAR**

Habiendo identificado AR(1) y SAR(1) calculamos las autocorrelaciones de orden 1 y 12

$$r_1 = 0.499 \quad r_{12} = -0.517$$

Y basándonos en las ecuaciones de Yule & Walker se tiene que  $\hat{\phi}_1 = 0.499$  y  $\hat{\phi}_{12} = -0.517$

Luego el modelo preliminar es:  $(1 + 0.517 B^{12}) (1 - 0.499 B) Z_t = a_t$

Aplicando estimación máximo verosímil, luego de 4 iteraciones se estabiliza la disminución de la suma de cuadrados de los residuos, así como la disminución de la constante de Marquardt, quedando como parámetros estimados:

$$r_1 = 0.657 \quad r_{12} = -0.720$$

**Cuadro N° 3.4**  
**LIMA METROPOLITANA: COEFICIENTES ESTIMADOS DE LA PEA, 2002-2009**

	Retardos no estacionales	Retardos estacionales	Suma de cuadrados corregida	Constante de Marquardt
	AR1	Estacional AR1		
0	.499	-.517	1616780.152	.001
1	.615	-.742	1486943.309	.001
2	.654	-.710	1482161.612	.000
3	.655	-.725	1481810.192	.000
4	.657	-.720	1481762.347 <sup>a</sup>	.000

Se ha utilizado el algoritmo de Melard para la estimación.

a. La estimación finalizó en esta iteración, ya que la suma de los cuadrados disminuyó en menos de .001%.

Fuente: INEI - EPE

El modelo final es:  $(1+0.720 B^{12})(1-0.657B)\nabla_{12}^2 Z_t = a_t$

Podemos comprobar la estacionariedad para este modelo, ya que  $\hat{\phi}_{11} = 0.657 < 1$  y  $\hat{\phi}_{12} = -0.720 < 1$ . Probando la asociación entre los parámetros estimados del modelo encontramos que  $\text{Corr}(\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{12}) = -0.008$

esto es justamente lo que se espera, que los parámetros no estén correlacionados, de tal manera que se justifica la presencia de los dos parámetros en el modelo.

**Cuadro N° 3.5**  
**LIMA METROPOLITANA: MATRIZ DE CORRELACIONES DE LOS COEFICIENTES ESTIMADOS DE LA PEA, 2002-2009**

		Retardos no estacionales	Retardos estacionales
		AR1	Seasonal AR1
Retardos no estacionales	AR1	1.000	-.008
Retardos estacionales	Seasonal AR1	-.008	1.000

Se ha utilizado el algoritmo de Melard para la estimación.

Fuente: INEI - EPE

**VALIDACIÓN DEL MODELO:**

Usaremos los residuos para validar el modelo, antes de presentar los pronósticos:

En primer lugar, calculamos las autocorrelaciones de los residuos. El estadístico

de Box-Ljung calculado para cada autocorrelación residual resulta no significativo, es decir "no se rechaza que sea igual a cero"

$$H_0: r_{\varepsilon_t} = 0 \quad H_1: r_{\varepsilon_t} \neq 0$$

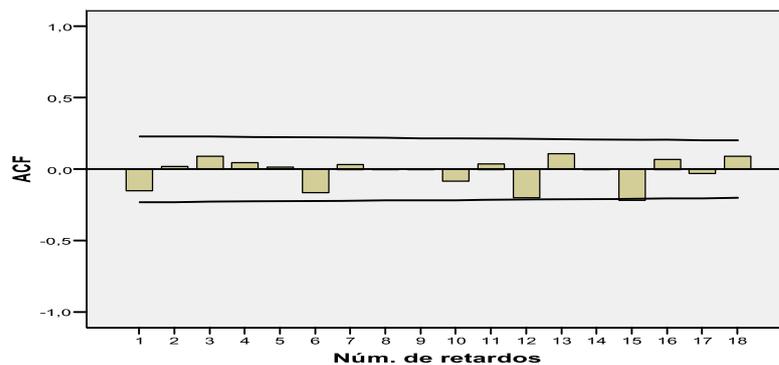
**Cuadro N° 3.6**  
**LIMA METROPOLITANA: AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS DEL MODELO**  
**PROPUESTO PARA LA PEA, 2002-2009**

Retardo	Autocorrelación	Error típico <sup>a</sup>	Estadístico de Box-Ljung		
			Valor	gl	Sig. <sup>b</sup>
1	-.151	.115	1.715	1	.190
2	.020	.115	1.746	2	.418
3	.089	.114	2.361	3	.501
4	.044	.113	2.516	4	.642
5	.015	.112	2.534	5	.771
6	-.165	.111	4.726	6	.579
7	.034	.110	4.820	7	.682
8	.003	.110	4.820	8	.777
9	-.001	.109	4.821	9	.850
10	-.085	.108	5.439	10	.860
11	.038	.107	5.566	11	.901
12	-.200	.106	9.122	12	.692
13	.106	.105	10.145	13	.682
14	-.004	.104	10.146	14	.751
15	-.219	.103	14.648	15	.477
16	.070	.103	15.108	16	.517
17	-.029	.102	15.190	17	.582
18	.090	.101	15.984	18	.594

Fuente: INEI - EPE

Graficando las autocorrelaciones residuales de las bandas de confianza. En consecuencia, encontramos que todas se encuentran dentro los residuos se comportan como ruido blanco.

**Gráfico N° 3.11**  
**LIMA METROPOLITANA: CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS DE LA PEA, 2002-2009**



Fuente: INEI - EPE

**DÓCIMA DE BOX-PIERCE Y DÓCIMA DE BOX-LUNG**

Prueba de hipótesis para la dócima Box-Pierce y dócima de Box -Lung

$$H_0: \rho_k(a_t) = 0$$

$$H_1: \rho_k(a_t) \neq 0$$

**Cuadro N° 3.7**  
**LIMA METROPOLITANA: DÓCIMAS DE LAS AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS**  
**DEL MODELO PROPUESTO PARA LA PEA, 2002-2009**

N°	RESIDUALES	BOX-PIERCE	BOX-LUNG
1	-0,15	0,0229	0,0002
2	0,02	0,0004	0,0000
3	0,09	0,0080	0,0001
4	0,04	0,0020	0,0000
5	0,02	0,0002	0,0000
6	-0,16	0,0272	0,0003
7	0,03	0,0011	0,0000
8	0,00	0,0000	0,0000
9	0,00	0,0000	0,0000
10	-0,08	0,0072	0,0001
11	0,04	0,0015	0,0000
12	-0,20	0,0400	0,0005
13	0,11	0,0113	0,0001
14	0,00	0,0000	0,0000
15	-0,22	0,0482	0,0006
16	0,07	0,0048	0,0001
17	-0,03	0,0008	0,0000
18	0,09	0,0080	0,0001
	<b>SUMATORIA</b>	<b>0,1837</b>	<b>0,0022</b>
	<b>ESTADÍSTICO</b>	<b>17,6320</b>	<b>20,2488</b>
	<b>CHI CUADRADO</b>	<b>115,3900</b>	<b>36,4200</b>

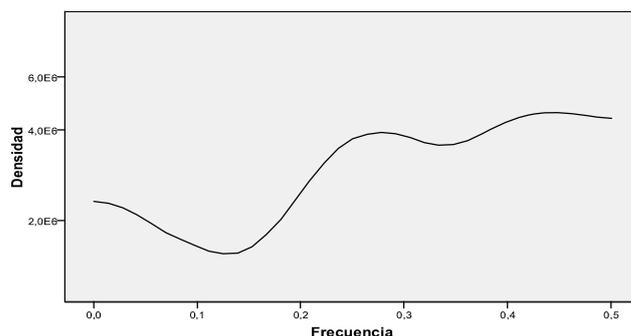
Fuente: INEI - EPE

Estadístico de prueba: 17.6320082 y 20.2488021

Regla de decisión: Para ambas pruebas se concluye que no se rechaza la hipótesis nula es decir toda la información que contiene los  $a_t$  han sido captadas por el modelo.

Finalmente, encontramos la densidad espectral para la PEA. Usamos la ventana de Tuckey. Podemos observar que los residuos no presentan información respecto a tendencia, estacionalidad ni ciclos, quedando la aleatoriedad, la misma que corresponde a las frecuencias más altas.

**Gráfico N° 3.12**  
**LIMA METROPOLITANA: DENSIDAD ESPECTRAL DE LA PEA, 2002-2009**



Fuente: INEI - EPE

Habiendo pasado las pruebas de validación, procedemos a realizar los pronósticos para los meses de enero a abril 2010.

**Cuadro N°3.8**  
**LIMA METROPOLITANA: PRONÓSTICOS**  
**DE LA PEA, 2002-2009**

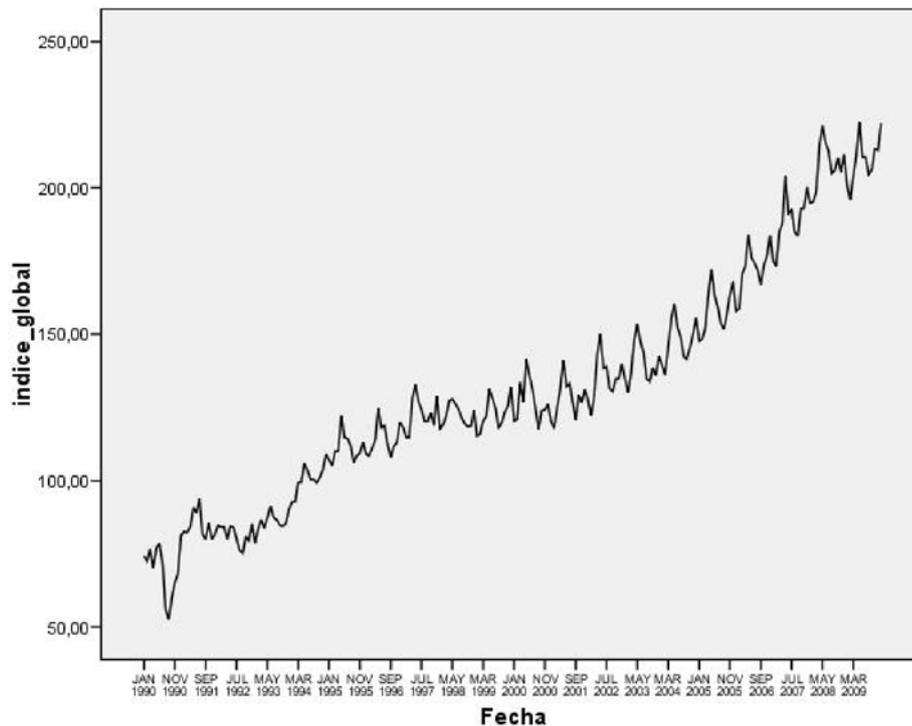
Mes	Pronóstico
Enero	4684,194
Febrero	4646,965
Marzo	4777,699
Abril	4815,795

Fuente: Banco Central de Reserva

**CASO N°2: ÍNDICE GLOBAL DE PRODUCCIÓN NACIONAL 1990-2010.**

El comportamiento del Índice Global de Producción Nacional sigue una tendencia lineal creciente, con estacionalidad claramente determinística. Corresponde por tanto una estimación mediante modelos SARIMA.

**Gráfico N° 3.13**  
**PERÚ: ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE PRODUCCIÓN NACIONAL, 1991-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

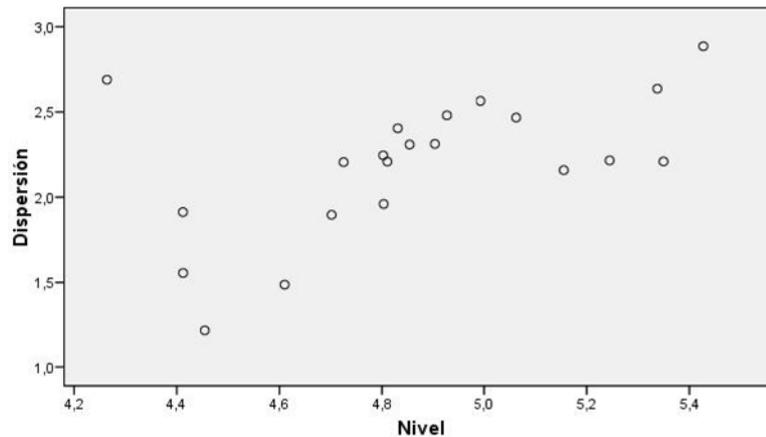


Fuente: INEI

Esta misma tendencia lineal hace suponer que la serie no sea estacionaria por nivel y que por lo tanto será necesario aplicar diferencias finitas para conseguir estacionariedad. Por otro lado, observamos que la variabilidad de la serie es cambiante. En los primeros años de la serie, la variabilidad es bastante inestable,

mientras que a partir de la mitad del periodo en observación esta se vuelve más homogénea. Por ello es de suponer que la serie no será estacionaria en variabilidad, y que por lo tanto, será necesario aplicar transformaciones no lineales.

**Gráfico N° 3.14**  
**PERÚ: NIVEL VS DISPERSIÓN DEL ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE PRODUCCIÓN**  
**NACIONAL, 1991-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



\* Gráfico de LN de dispersión por LN de nivel

Inclinación = .695 Potencia para transformación = .305

Fuente: INEI

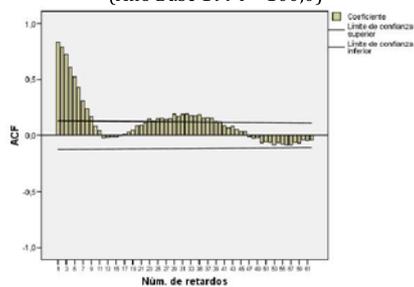
El gráfico de dispersión vs. Nivel confirma la sospecha de no estacionariedad por variabilidad, sugiriendo como transformación, una potencia de 0.305 para estabilizarla. En consecuencia, la serie será modelada con esta transformación.

**Identificación:**

El gráfico de las autocorrelaciones simples presenta un comportamiento autorregresivo en la parte regular y autorregresivo en la parte estacional. Complementando la identificación con el análisis de las autocorrelaciones parciales. Proponemos como modelo un AR(2) para la parte regular y un SAR(1) para la parte estacional.

**Gráfico N° 3.15**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA DEL ÍNDICE**  
**GLOBAL MENSUAL DE PRODUCCIÓN**  
**NACIONAL, 2002 - 2009**

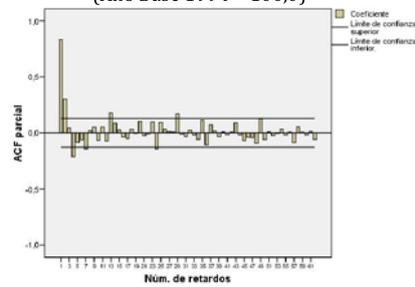
(Año Base 1994 = 100,0)



Fuente: INEI

**Gráfico N° 3.16**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES PARCIALES**  
**DEL ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE**  
**PRODUCCIÓN NACIONAL, 2002 - 2009**

(Año Base 1994 = 100,0)



Fuente: INEI

El modelo propuesto será  $(2,0,0) (1,1,0)_{12}$

A continuación presentaremos las estimaciones de parámetros preliminares y finales.

**Cuadro N° 3.9**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE PRODUCCIÓN NACIONAL, 2002-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

	Retardos no estacionales		Retardos estacionales	Suma de cuadrados corregida	Constante de Marquardt
	AR1	AR2	Estacional AR1		
0	.638	.303	.432	4920.870	.001
1	.648	.307	-.170	3445.482	.001
2	.615	.355	-.266	3397.730	.000
3	.606	.363	-.280	3396.497 <sup>a</sup>	.000

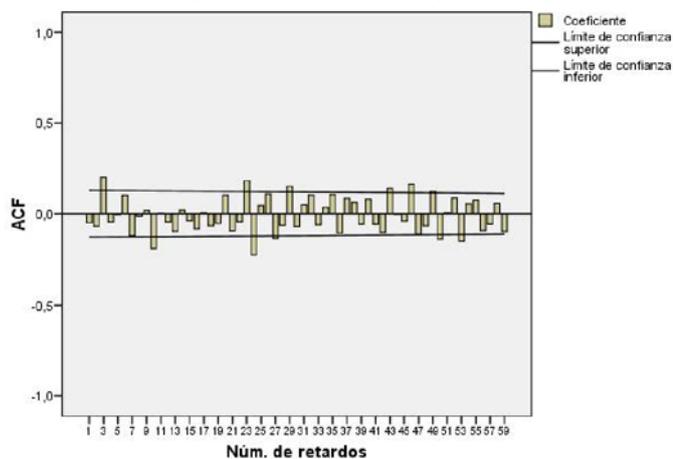
Se ha utilizado el algoritmo de Melard para la estimación.

a. La estimación finalizó en esta iteración, ya que la suma de los cuadrados disminuyó en menos de .001%.

Fuente: INEI

Las estimación preliminar es  $\hat{\phi}_{11} = 0.638$   $(1 - 0.432 B^2)(1 - 0.638B - 0.303B^2) \nabla_{12}^2 Z_t = a_t$   
 $\hat{\phi}_{12} = 0.303$   $\hat{\phi}_{112} = 0.432$  Después de 3 iteraciones se obtiene la estimación máximo verosímil de los parámetros:  
 Con este modelo, las autocorrelaciones de los residuos siguen el siguiente comportamiento:

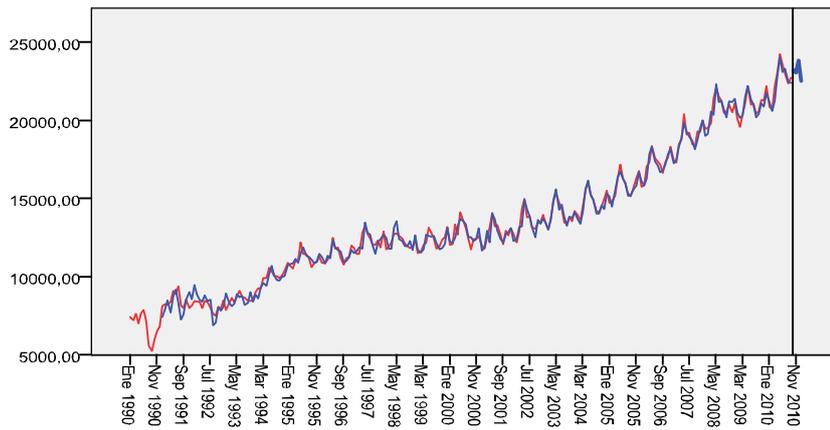
**Gráfico N° 3.17**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS DEL ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE PRODUCCIÓN NACIONAL, 1990-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



Fuente: INEI

Los pronósticos correspondientes al periodo octubre 2010 a diciembre de 2011 se muestran a continuación, los mismos que han sido re-transformados a la base original de la serie.

**Gráfico N° 3.18**  
**PERÚ: ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE PRODUCCIÓN NACIONAL, ORIGINAL VS. ESTIMADA Y PRONOSTICADA, 1990-2010**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



Fuente: INEI

**Cuadro N° 3.10**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE PRODUCCIÓN NACIONAL, 2010-2011**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

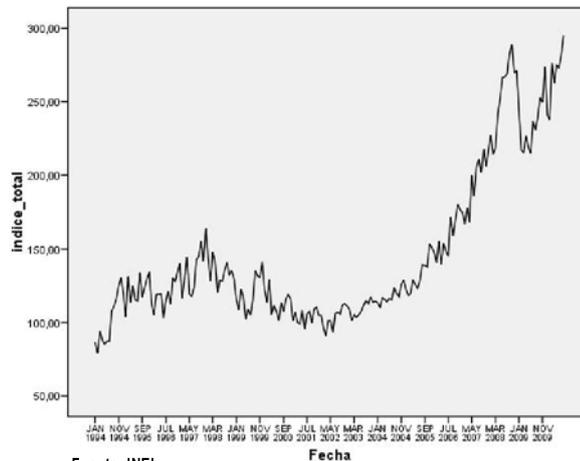
PRONÓSTICOS		
2010	AGO	22488,30
	SEP	22437,87
	OCT	23240,21
	NOV	23062,94
	DIC	23839,43
2011	ENE	22543,26
	FEB	22249,67
	MAR	23519,07
	ABR	24297,69
	MAY	25410,77
	JUN	24553,53
	JUL	24112,60
	AGO	23440,56
	SEP	23720,27
OCT	24241,27	
NOV	24064,95	

Fuente: INEI

**CASO N°3: SERIE MENSUAL DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL 1994-2009.**

Esta serie no es estacionaria ni por nivel ni por variabilidad. Presenta además un comportamiento estacional. La tendencia no es de tipo lineal. Sus variadas características la hacen apropiada para ser trabajada por el enfoque ARIMA.

**Gráfico N° 3.19**  
**PERÚ: ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL, 1994-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

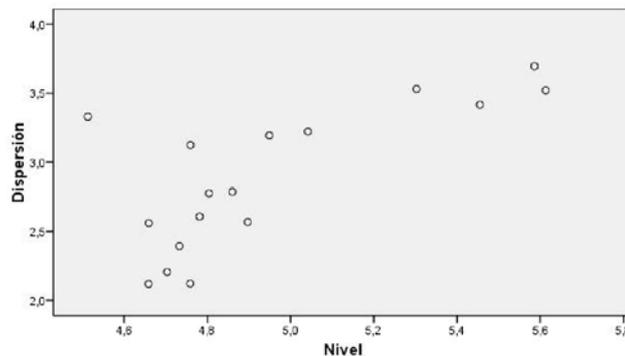


Fuente: INEI

A pesar de ser no estacionaria por variabilidad, se prefiere no hacer transformaciones. La sugerencia del gráfico exploratorio es aplicar una TNL negativa (-0.118). En la práctica se ha encontrado que transformaciones de potencias

negativas no ofrecen buenos resultados. De esta manera, probaremos con la modelización sin transformación hasta la etapa de validación en la cual veremos si realmente es necesaria.

**Gráfico N° 3.20**  
**PERÚ: NIVEL VS DISPERSIÓN DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL, 1994-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



\* Gráfico de LN de dispersión por LN de nivel

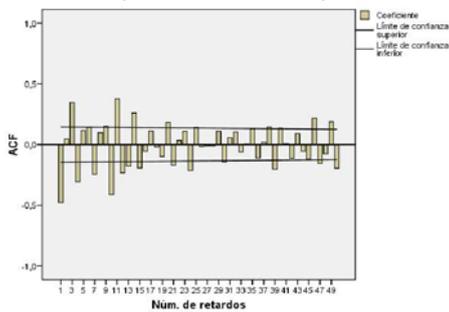
Inclinación = 1.118 Potencia para transformación = -.118

Fuente: INEI

**IDENTIFICACIÓN:**

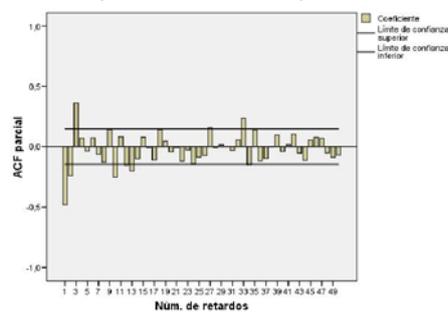
Analizando los correlogramas simple y parcial, se ha identificado un modelo  $(3,1,0) (1,1,0)_{12}$  en donde se obtuvo las siguientes autocorrelaciones simples como parciales.

**Gráfico N° 3.21**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA DEL ÍNDICE**  
**TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE**  
**CAPITAL, 1994 - 2009**  
 (Año Base 1994 = 100,0)



Fuente: INEI

**Gráfico N° 3.22**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES PARCIALES**  
**DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA**  
**DE CAPITAL, 1994 - 2009**  
 (Año Base 1994 = 100,0)



Fuente: INEI

Las estimaciones de parámetros preliminares y finales son las siguientes:

**Cuadro N° 3.11**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE**  
**CAPITAL, 1994-2009**  
 (Año Base 1994 = 100,0)

	Retardos no estacionales			Retardos estacionales	Suma de cuadrados corregida	Constante de Marquardt
	AR1	AR2	AR3	Estacional AR1		
0	-.394	.088	.410	-.267	18668.129	.001
1	-.417	.004	.377	-.357	18438.910	.001
2	-.435	-.007	.376	-.361	18431.384	.000
3	-.435	-.008	.375	-.365	18431.103 <sup>a</sup>	.000

Se ha utilizado el algoritmo de Melard para la estimación.

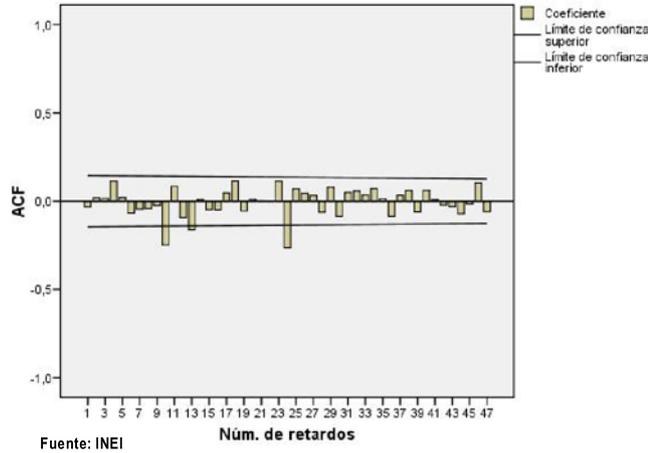
a. La estimación finalizó en esta iteración, ya que la suma de los cuadrados disminuyó en menos de .001%.

Fuente: INEI

Han sido necesarias sólo 3 iteraciones para encontrar el conjunto de parámetros estimados por máximo verosimilitud. Una convergencia rápida es deseable en la estimación, ya que por

lo general, cuando se aplican modelos inadecuados se requiere un gran número de iteraciones para minimizar la Suma de Cuadrados del residuo.

**Gráfico N° 3.23**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL, 1994-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



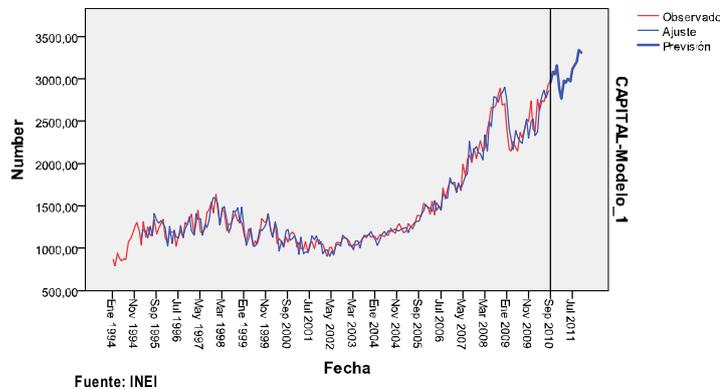
A pesar que el gráfico de autocorrelaciones residuales deja escapar 2 autocorrelaciones residuales, esto se produce en retardos diferentes a los múltiplos de  $S=12$ . Esta situación se produce cuando en el modelo aparecen algunas variabilidades que no han sido incorporadas en la estimación.

Recordemos que en un inicio se discutió la posibilidad de transformar la serie para estabilizar la variabilidad y se prefirió no

hacerlo, esta situación se ve reflejada en este resultado.

Aún con este resultado en los residuales, se ha procedido a pronosticar presentándose a continuación la gráfica de la serie original y de manera superpuesta la serie estimada. Obsérvese que la estimación sigue muy bien la secuencia de datos observados. Por lo tanto, preferimos aplicar este modelo para estimar los pronósticos.

**Gráfico N° 3.24**  
**PERÚ: ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL, ORIGINAL VS. ESTIMADA, 1994-2009 Y PRONOSTICADA 2011**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



A continuación, se procederá a presentar los pronósticos correspondientes de setiembre del 2010 a diciembre de 2011.

**Cuadro N° 3.12**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL, 1010-2011**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010									2961,51	3090,34	3057,63	3160,08
2011	2879,16	2771,09	2985,34	2962,20	3004,28	2972,08	3118,48	3173,16	3209,26	3346,28	3310,68	

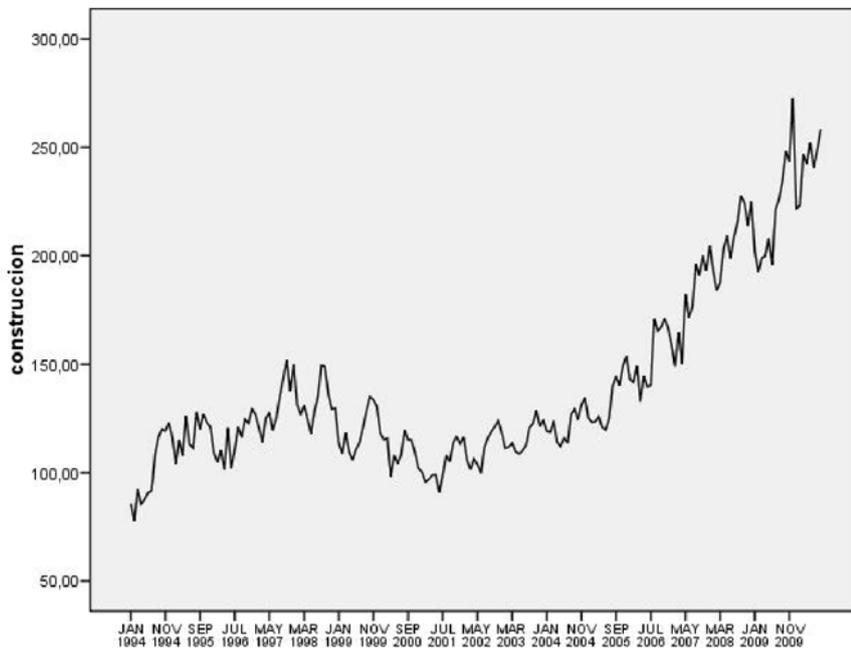
Fuente: INEI

**CASO N°4: ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL DE CONSTRUCCIÓN 1994-2010**

El comportamiento de esta serie corresponde a una variable en el tiempo no estacionaria tanto por nivel como por variabilidad. Su secuencia

es parecida a la serie anterior ya que pertenece a la familia de series: Índice Total de Formación Bruta. Sin embargo, cada serie tiene particularidades que hace necesario un análisis particular.

**Gráfico N° 3.25**  
**PERÚ: ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CONSTRUCCIÓN, 1994-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

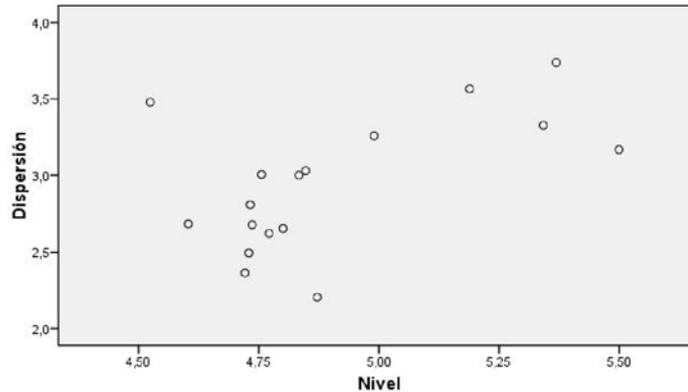


Fuente: INEI

Es así como el comportamiento no estacionario en variabilidad será tratado mediante una

transformación: potencia 0.145.

**Gráfico N° 3.26**  
**PERÚ: NIVEL Y DISPERSIÓN DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CONSTRUCCIÓN, 1994-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



\* Gráfico de LN de dispersión por LN de nivel

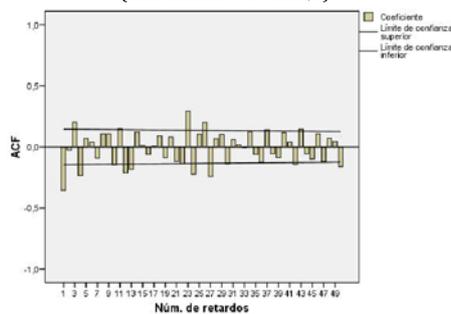
Inclinación = .855 Potencia para transformación = .145

Fuente: INEI

**Identificación:** Luego de aplicar 1 diferencia tanto en la parte regular como en la parte estacional de la serie se ha conseguido observar gráficos de autocorrelaciones simples y autocorrelaciones parciales identificables.

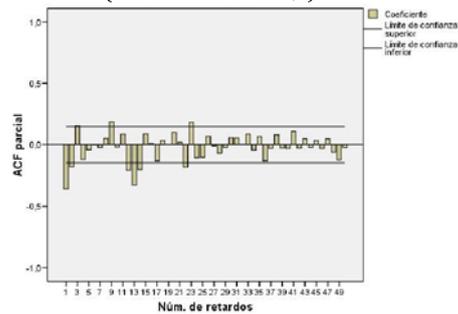
El comportamiento del correlograma simple sugiere un modelo autorregresivo, igualmente en el caso de la parte estacional, la cual se identifica a partir del retardo S=12.

**Gráfico N° 3.27**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA DEL ÍNDICE DE FORMACIÓN BRUTA DE CONSTRUCCIÓN, 1994-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



Fuente: INEI

**Gráfico N° 3.28**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES PARCIALES DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CONSTRUCCIÓN, 1994 - 2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**



Fuente: INEI

Del gráfico de autocorrelaciones parciales, se puede observar que es un AR(2) en la parte regular y un AR(2) en la parte estacional.

De esta manera, el modelo propuesto será:  $(2,1,0) (2,1,0)_{12}$   
 A continuación, presentaremos las estimaciones de parámetros preliminares y finales.

**Cuadro N° 3.13**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CONSTRUCCIÓN, 1994-2009**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

	Retardos no estacionales		Retardos estacionales		Suma de cuadrados corregida	Constante de Marquardt
	AR1	AR2	Estacional AR1	Estacional AR2		
0	-0.438	-0.163	-0.253	-0.238	11650.511	.001
1	-0.461	-0.193	-0.449	-0.220	11165.497	.001
2	-0.526	-0.237	-0.459	-0.204	11106.499	.000
3	-0.531	-0.245	-0.481	-0.205	11099.765	.000
4	-0.538	-0.250	-0.483	-0.202	11098.982 <sup>a</sup>	.000

Se ha utilizado el algoritmo de Melard para la estimación.

a. La estimación finalizó en esta iteración, ya que la suma de los cuadrados disminuyó en menos de .001%.

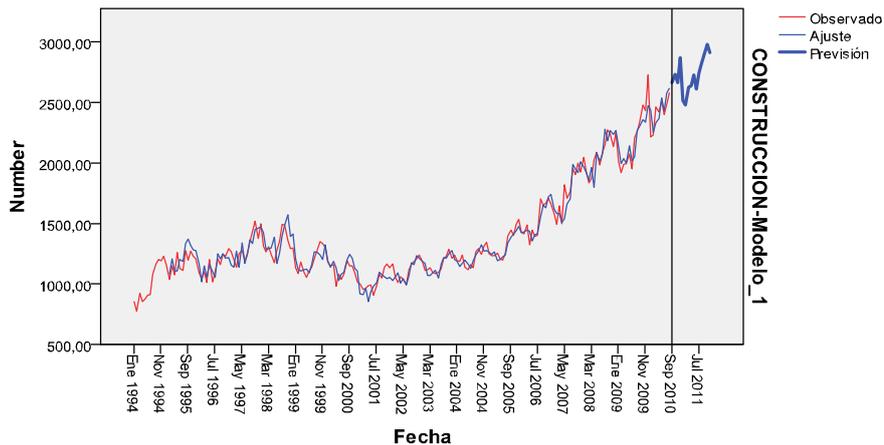
Fuente: INEI

El modelo final será:  $(1 + 0.538B + 0.250B^2)$   
 $(1 + 0.483B_{12}^1 + 0.202B_{12}^2) \nabla^1 \nabla_{12}^1 Z_t = a_t$   
 Se puede verificar que el modelo es estacionario tanto para la parte regular como para la parte estacional.

**6.- PRONÓSTICOS:**

Ahora podemos graficar la serie original y de manera superpuesta la serie estimada con sus pronósticos. Se aprecia una ligera sobreestimación en el año 2009, por lo demás el comportamiento de ambas series es muy parecido y los pronósticos siguen la secuencia de la serie.

**Gráfico N° 3.29**  
**PERÚ: ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CONSTRUCCIÓN, ORIGINAL VS. ESTIMADA Y PRONOSTICADA, 1994-2011**



Fuente: INEI

A continuación, se procederá a presentar los pronósticos correspondientes de setiembre de 2010 a diciembre de 2011.

**Cuadro N° 3.14**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL ÍNDICE TOTAL DE FORMACIÓN BRUTA DE CONSTRUCCIÓN, 2010-2011**  
**(Año Base 1994 = 100,0)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010									2665,14	2733,99	2666,93	2875,27
2011	2521,31	2484,03	2631,60	2641,84	2727,96	2611,99	2747,70	2824,86	2915,01	2983,07	2913,22	

Fuente: INEI

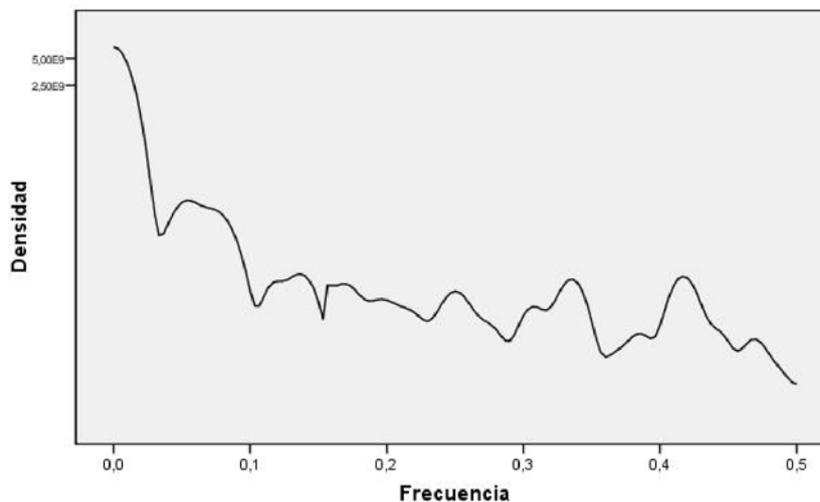
**CASO N°5: EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**

serie no estacionaria con un rápido crecimiento no lineal y con grandes saltos en la variabilidad.

Hemos realizado el análisis de esta serie en la sección de aplicaciones del capítulo II. Consideramos que se trata de una serie cuyas características la hacen idónea para aplicar otros métodos además de los ARIMA, como los modelos de volatilidad e incluso los modelos de intervención. Hemos dicho que se trata de una

Mientras más características presente el gráfico de la serie original, debemos estar en condiciones de aplicar un mayor refinamiento. Con esta serie, comenzaremos por aplicar la función densidad espectral de la serie original a fin de analizar su comportamiento con mayor detalle.

**Gráfico N° 3.30**  
**PERÚ: ESPECTRO DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



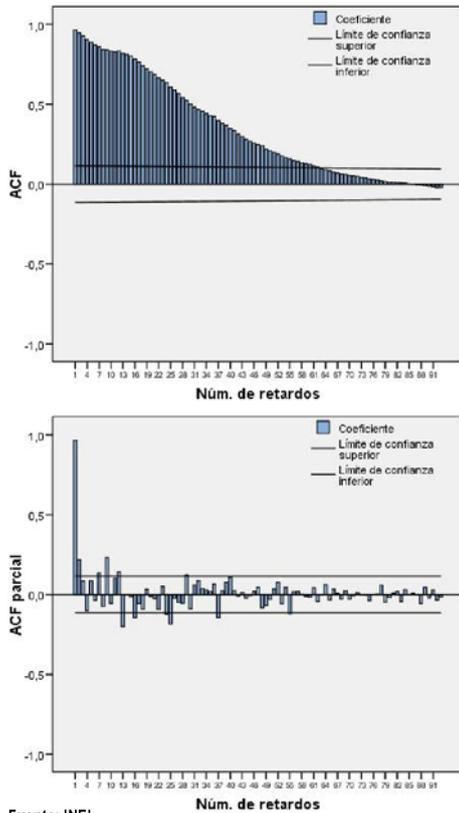
Fuente: INEI

Ventana: Tukey-Hamming (93)

Haciendo uso del espectro con ventana de Tuckey-Hamming, se observa que la tendencia es la componente más influyente en esta serie, también se aprecia la presencia de la componente cíclica y estacionalidad encubierta

por el ciclo-tendencia. La forma cóncava en las primeras frecuencias nos sugiere que podemos modelar esta serie con procesos autorregresivos y/o que se trata de una serie no estacionaria.

**Gráfico N° 3.31**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA Y AUTOCORRELACIONES PARCIALES DE LAS**  
**EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

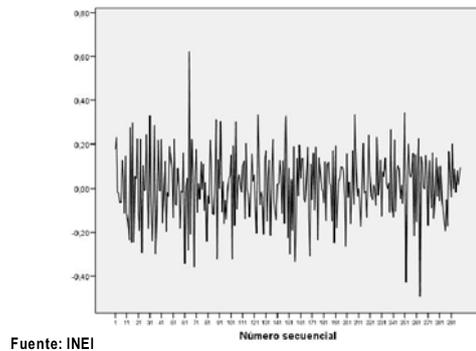


El estudio de las gráficas de autocorrelaciones simples y parciales ponen en evidencia que la serie es no estacionaria, ya que las autocorrelaciones decaen muy lentamente (autocorrelaciones simples) y además la primera autocorrelación (simple y parcial también) tienen un valor muy próximo a la unidad. A partir de estos resultados se propone aplicar diferencias finitas para estabilizar el comportamiento de la serie en cuanto a nivel. Previamente y con ayuda del gráfico dispersión-nivel se encontró como TNL el logaritmo.

Fuente: INEI

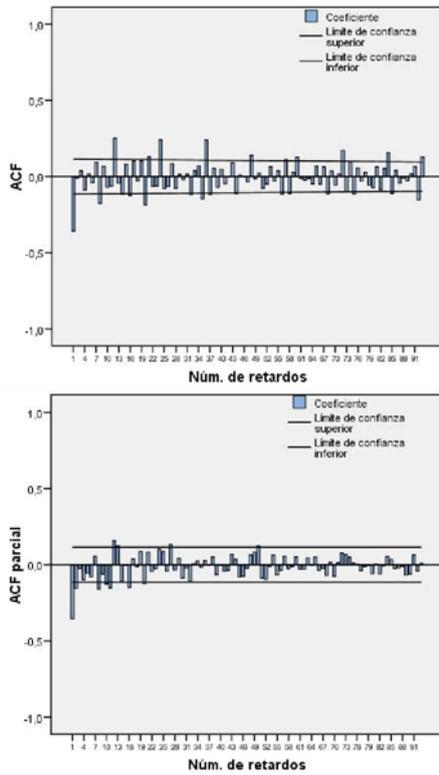
Aplicando transformación logarítmica y una diferencia regular observamos que la serie logra estabilizarse tanto en nivel como en variabilidad.

**Gráfico N° 3.32**  
**PERÚ: TRANSFORMACIÓN DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



Fuente: INEI

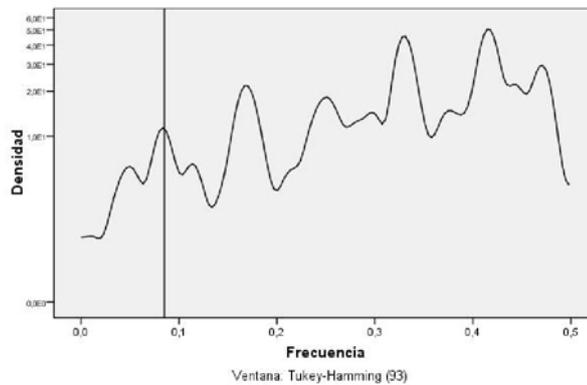
**Gráfico N° 3.33**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA Y AUTOCORRELACIONES PARCIALES DE LA TRANSFORMACIÓN**  
**DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



Según las FAC y FAP no hay problema de estacionariedad en la parte regular, y se identifica un proceso tipo AR(1), y en la parte estacional es un ARMA(1,1).  
  
 Es decir la serie se puede modelar aplicando primero logaritmo natural y luego un SARIMA(1,1,0)(1,0,1)<sub>12</sub>

Fuente: INEI

**Gráfico N° 3.34**  
**PERÚ: DENSIDAD ESPECTRAL DE LA TRANSFORMACIÓN DE LAS EXPORTACIONES DE**  
**PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



Fuente: INEI

Observemos como después de la aplicación de la diferencia regular, al graficar el espectro se evidencia el comportamiento estacional.

Ahora podemos presentar la modelización para un SARIMA  $(1,1,0)(1,0,1)_{12}$  con previa transformación logaritmo natural.

**Cuadro N° 3.15**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985-2009**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

	Retardos no estacionales	Retardos estacionales		Constante	Suma de cuadrados corregida	Constante de Marquardt
	AR1	Estacional AR1	Estacional MM1		Estacional AR1	Estacional MM1
<b>0</b>	-0,356	0,94	0,691	0,009	5,355	0,001
<b>1</b>	-0,388	0,926	0,779	0,009	5,249	0,001
<b>2</b>	-0,379	0,949	0,802	0,009	5,242	0
<b>3</b>	-0,38	0,946	0,8	0,009	5,241(a)	0

Fuente: INEI

Se ha utilizado el algoritmo de Melard para la estimación.

a La estimación finalizó en la tercera iteración, ya que la suma de los cuadrados disminuyó en menos de .001%.

**Cuadro N° 3.16**  
**PERÚ: DIAGNÓSTICO RESIDUAL DEL MODELO SARIMA DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, 1985-2009**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

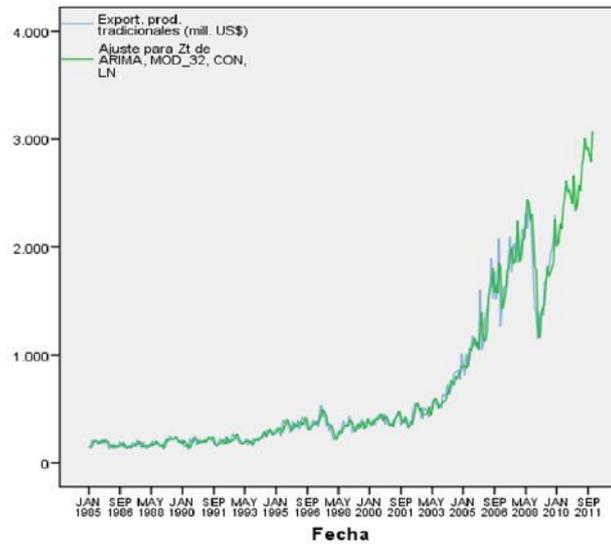
Número de residuos	299
Número de parámetros	3
GL residuales	295
Suma de cuadrados residual corregida	5,241
Suma de cuadrados residual	5,355
Varianza residual	0,017
Error típico del modelo	0,132
Log-verosimilitud	180,29
Criterio de información de Akaike (AIC)	-352,581
Criterio bayesiano de Schwarz (BIC)	-337,779
Estadístico de Box & Pierce	82,9928

Fuente: INEI

Según el criterio de información de akaike (AIC = -352.581) y criterio bayesiano de Schwarz (BIC = -337.779) son menores que probando

con otros ajustes, esto nos indica que este modelo es el adecuado.

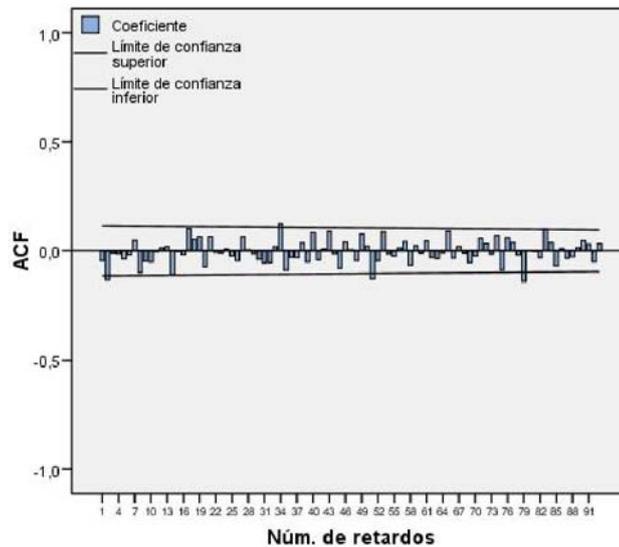
**Gráfico N° 3.35**  
**PERÚ: EXPORTACIONES DE PRODUCTOS TRADICIONALES, ORIGINAL VS EL MODELO**  
**ARIMA, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



Fuente: INEI

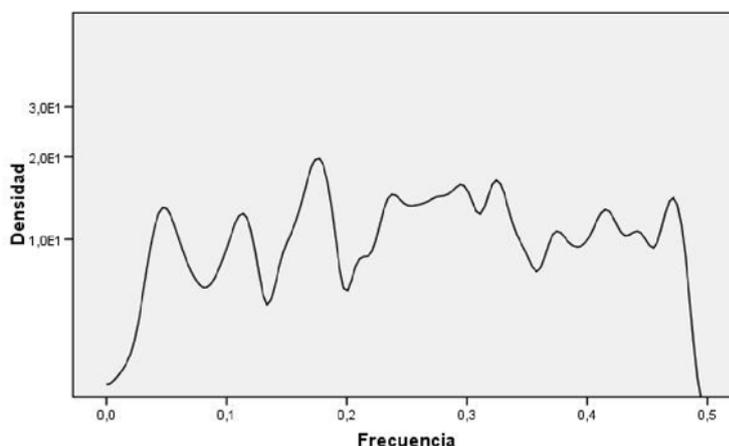
El valor ajustado con el valor original son muy parecidos. Así mismo los pronósticos siguen el comportamiento de la serie en sus últimos años.

**Gráfico N° 3.36**  
**PERÚ: CORRELOGRAMA DE LOS RESIDUOS DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS**  
**TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



Fuente: INEI

**Gráfico N° 3.37**  
**PERÚ: DENSIDAD ESPECTRAL DE LAS EXPORTACIONES DE PRODUCTOS**  
**TRADICIONALES, 1985 - 2009.**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**



Fuente: INEI

Ventana: Tukey-Hamming (93)

Según los gráficos del correlograma residual, las autocorrelaciones de los residuos están dentro de la banda de confianza, lo cual indica que se puede considerar los residuos como ruido blancos; en el gráfico espectral de los residuos sólo se observa el patrón aleatorio en la parte regular y en la parte estacional se puede decir que aún queda información no capturada por el modelo.

También podemos evaluar los residuos con el test de Box & Pierce:

$H_0$  : Los errores están incorrelacionados

$H_1$  : Los errores están correlacionados.

$\alpha = 0.05$

$$\text{Estadístico de prueba: } Q = T \sum_{j=1}^{T/4} \hat{r}_j^2(\hat{a}_j) = 300 * 0.277 = 82.993$$

Región crítica:  $\chi^2_{t/4-3}(0.05) = 113.15$

Como  $Q < \chi^2_{t/4-3}$  no se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5%, es decir los errores están incorrelacionados.

**Cuadro N° 3.17**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DE LAS**  
**EXPORTACIONES DE PRODUCTOS**  
**TRADICIONALES, 2010 - 2011**  
**(Millones de dólares norteamericanos)**

Año	Mes	Pronostico
2010	enero	2004,02528
2010	febrero	2039,22459
2010	marzo	2210,59372
2010	abril	2157,86878
2010	mayo	2368,81679
2010	junio	2457,05756
2010	julio	2606,22141
2010	agosto	2506,57636
2010	septiembre	2518,19845
2010	octubre	2450,5611
2010	noviembre	2390,03289
2010	diciembre	2655,23029
2011	enero	2321,17366
2011	febrero	2366,25178
2011	marzo	2553,52555
2011	abril	2497,44167
2011	mayo	2729,5744
2011	junio	2827,33987
2011	julio	2991,29057
2011	agosto	2883,64065
2011	septiembre	2897,44972
2011	octubre	2824,5381
2011	noviembre	2759,26308
2011	diciembre	3050,59497

Fuente: INEI

# **ANEXO**



**ANEXO**  
**ANEXO 1: VOL. VENTAS DE HARINA DE TRIGO**

**MODELO PROPUESTO:**  
Se identificó el modelo  $(1,1,1)(1,1,1)_{12}$

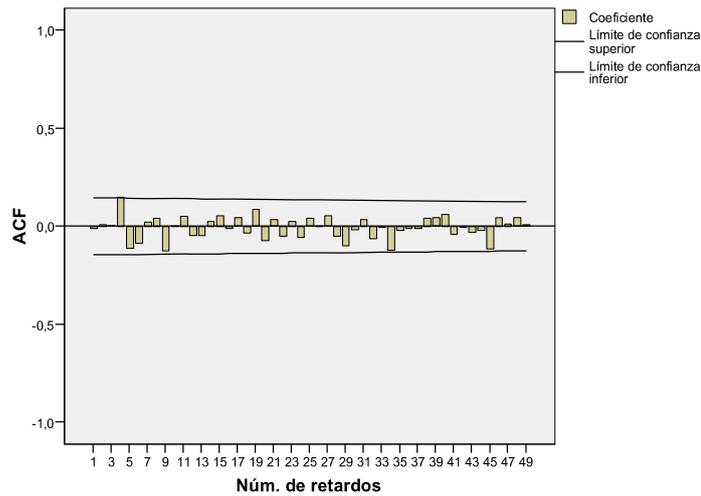
**CARACTERÍSTICAS:**

**Periodo de Observación:** Enero de 1994 a Agosto de 2010  
**Tipo de Modelo:** SARIMA no estacionario  
**Longitud estacional:** 12  
**Tendencia:** Creciente.

**Cuadro N° 1**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE HARINA DE TRIGO, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

Parámetros del modelo				
Producción de harina de trigo	AR(1)	MA(1)	AR(1)	MA(1)
			ESTACIONAL	ESTACIONAL
	0,154	0,92	0,029	0,947

**Gráfico N° 1**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE HARINA DE TRIGO, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**MEDIDA DE VERIFICACIÓN**

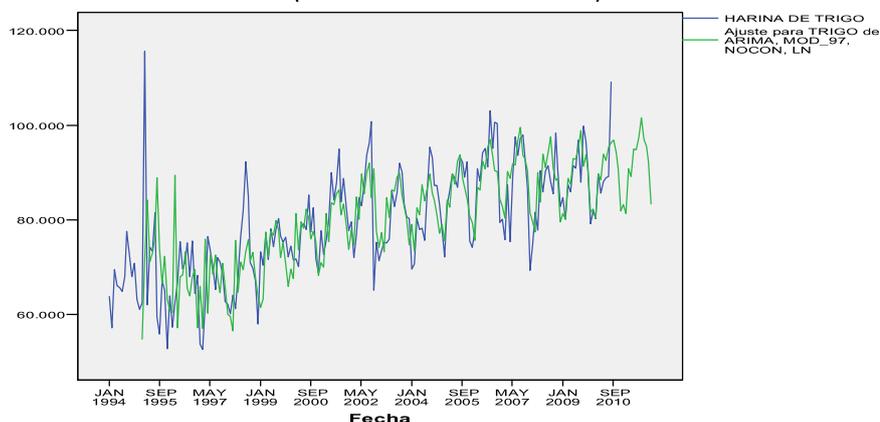
Test de Box & Pierce  
 $H_0$ : Los errores son incorrelacionados  
 $H_1$ : Los errores no son incorrelacionados  
Nivel de significación:  $\alpha=0.05$

QBox & Pierce= 31.3 < Ji-Cuadrado con 194 g.l.=227.5

No se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%.

**Conclusión:** Los residuos son incorrelacionados.

**Gráfico N° 2**  
**PERÚ: VOLUMEN DE VENTA DE HARINA DE TRIGO, ORIGINAL, 1994 - 2009 VS. ESTIMADA, 2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**Cuadro N° 2**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE HARINA DE TRIGO, 2010 - 2011**  
**(Miles de toneladas métricas)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010									96402,80	93568,40	90104,60	81344,40
2011	82759,20	80688,80	90187,30	88524,30	94170,10	93934,90	96530,90	100581,60	95834,20	94270,50	91040,70	82299,1

**ANEXO2: VOL. VENTA DE ALIMENTOS**  
**BALANCEADOS - AVES**

**CARACTERÍSTICAS:**

**Periodo de Observación:** Enero 1994 - Agosto 2010

**Tipo de Modelo:** SARIMA no estacionario

**Longitud estacional:** 12 meses

**Tendencia:** Presenta una tendencia lineal creciente

**MODELO PROPUESTO:**

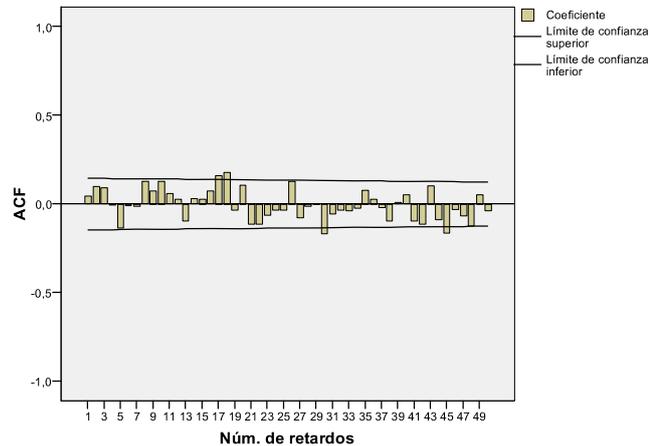
Para realizar la gráfico de secuencia se observa un dato 80 era discordante que era del mes de Agosto de 2002, se reemplazo este valor de agosto obteniéndose 96340 lo cual fue reemplazado por 20283. Se aplicó una transformación logaritmo natural por que no presentaba estacionariedad por variabilidad.

**Cuadro N° 3**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE ALIMENTOS, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

**SARIMA (1,1,1) (0,1,1)<sub>12</sub>**

Volumen de ventas de alimentos	Regular	Estacional
AR (1)	0,308	
MA(1)	0,726	0,972

**Gráfico N° 3**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE**  
**ALIMENTOS BALANCEADOS, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**MEDIDA DE VERIFICACIÓN**

Test de Box & Pierce

$H_0$ : Los errores son incorrelacionados

$H_1$ : Los errores no son incorrelacionados

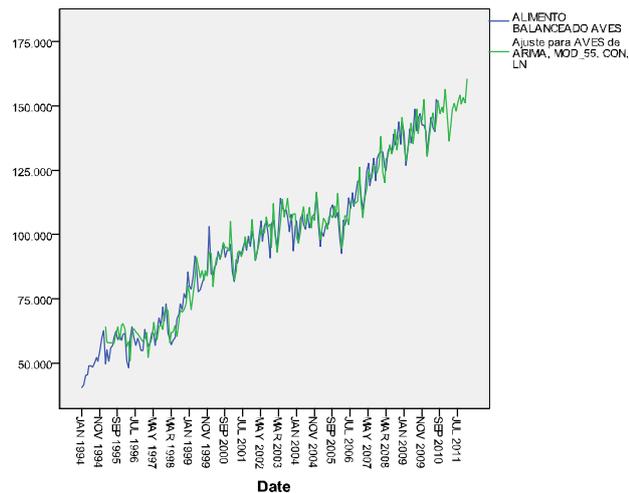
Nivel de significación:  $\alpha=0.05$

QBox & Pierce= 19.3 < Ji-Cuadrado con 195 g.l.=228.58

No se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%.

Conclusión: Los residuos son incorrelacionados (ruido blanco)

**Gráfico N° 4**  
**PERÚ: VOLUMEN DE VENTA ALIMENTO BALANCEADOS, ORIGINAL VS. ESTIMADA, 1994 - 2009 Y**  
**PRONÓSTICADA, 2010 - 2011**  
**(Miles de toneladas métricas)**



Observamos la serie ajustada y la serie original presenta un comportamiento parecido

**PRONÓSTICOS**

A continuación se presenta los pronósticos para la serie VOL. VENTAS DE ALIMENTOS BALANCEADOS - AVES

**Cuadro N° 4**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE ALIMENTOS, 2010 - 2011**  
**(Miles de toneladas métricas)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010									147258,40	149657,40	147733,70	156688,70
2011	146916,90	136587,20	143179,30	148652,10	151021,80	148056,20	151932,80	154347,60	150823,50	153417,20	151440,70	160549,2

**ANEXO 3: VOL. VENTAS DE LECHE EVAPORADA**

**CARACTERÍSTICAS**

**Periodo de Observación:** Desde Enero del 1994 hasta Agosto del 2010

**Tipo de Modelo:** SARIMA no estacionario ni en nivel ni en variabilidad

**Longitud estacional:** 12

**Tendencia:** determinística ascendente

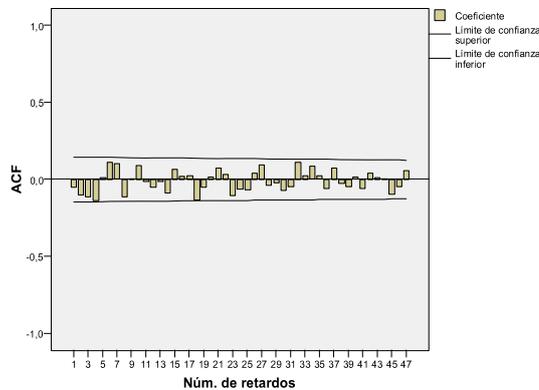
**MODELO PROPUESTO:**

**Cuadro N° 5**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

**SARIMA (3,1,0)(2,1,0)<sub>12</sub>**

Parámetros del modelo		
Nombre de la serie	Parte regular	Parte estacional
VOL. VENTAS DE LECHE EVAPORADA	$\Phi_1 = -0.632$	$\Phi_1 = -0.712$
	$\Phi_2 = -0.430$	$\Phi_2 = -0.341$
	$\Phi_3 = -0.295$	

**Gráfico N° 5**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**MEDIDA DE VERIFICACIÓN**

Test de Box & Pierce

$H_0$ : Los errores son incorrelacionados

$H_1$ : Los errores no son incorrelacionados

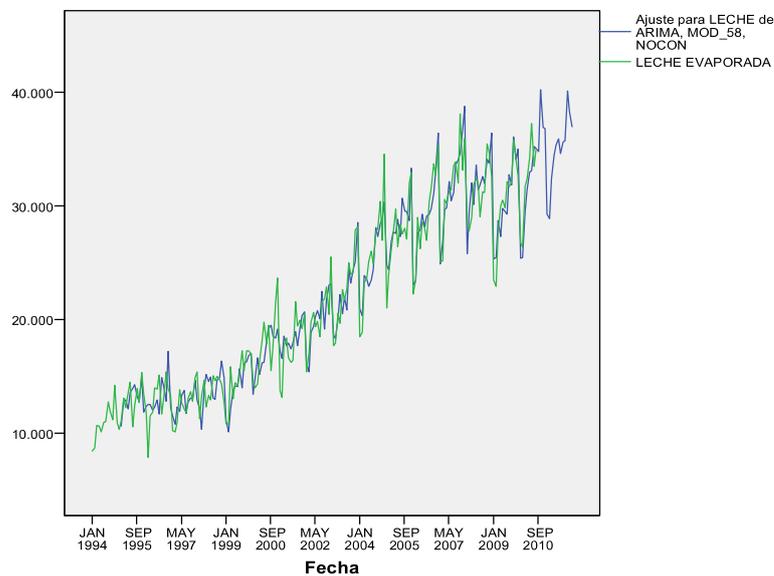
Nivel de significación:  $\alpha=0.05$

QBox & Pierce= 44.3 < Ji-Cuadrado con 193 g.l.=226.4

No se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%.

**Conclusión:** Por lo tanto podemos decir que los residuos no están correlacionados y no contienen información relevante de nuestra serie.

**Gráfico N° 6**  
**PERÚ: VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA, ORIGINAL VS. ESTIMADA, 1994 - 2009**  
**Y PRONÓSTICADA, 2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**Cuadro N° 6**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA, 2010-2011**  
**(Miles de toneladas métricas)**

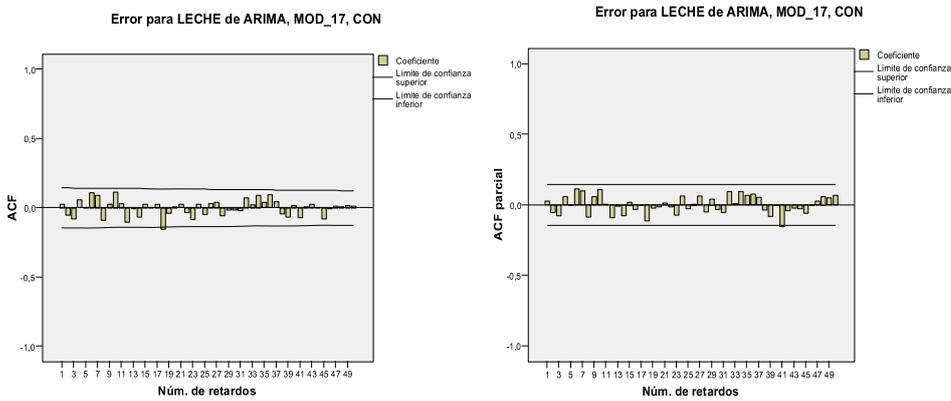
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010									34822,700	40247,900	36980,900	36870,400
2011	29341,141	28898,600	32457,101	34494,956	35412,025	35921,199	34662,191	35685,959	35753,400	40157,100	38300,400	37036,200

**MODELO ALTERNATIVO PROPUESTO:** Sarima (1,0,1) (0,1,1)<sub>12</sub>

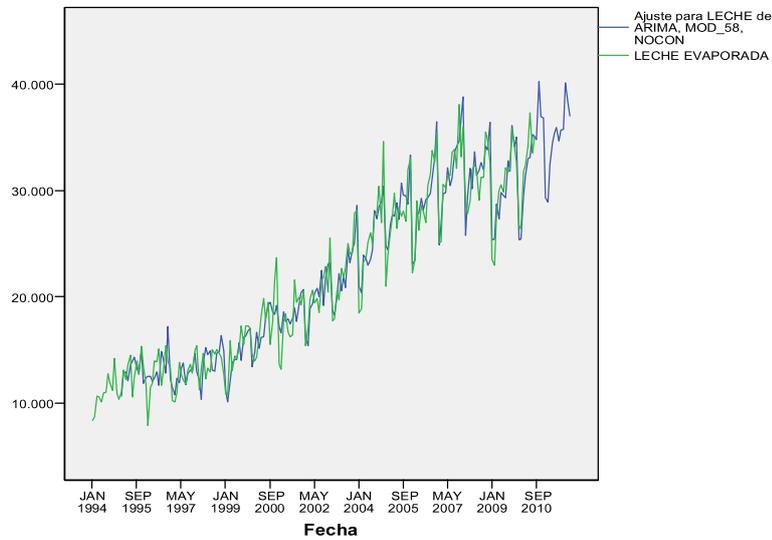
**Cuadro N° 7**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA,**  
**1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

Parámetros del modelo			
Nombre de la serie	AR 1 regular	MA1 regular	MA1 estacional
sarima (1,0,1) (0,1,1) <sub>12</sub>	0,954	0,713	0,675

**Gráfico N° 7**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE LECHE**  
**EVAPORADA, 1994 - 2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**Gráfico N° 8**  
**PERÚ: VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA, ORIGINAL VS. ESTIMADA, 1994 - 2009**  
**Y PRONÓSTICADA, 2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**Cuadro N° 8**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA, 2010 - 2011**  
**(Miles de toneladas métricas)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010									34975,61	38322,91	37019,33	37333,43
2011	29264,22	29154,03	33418,27	34403,49	35647,89	36254,16	35285,89	36474,14	36377,72	39726,47	38424,28	38739,70

**ANEXO 4: VOL. VENTAS DE ACEITE VEGETAL**

**Modelo Propuesto**

Para hallar el modelo de la serie aplicamos primero transformación y luego diferencia tanto a la parte regular como a la parte estacional.

**CARACTERÍSTICAS**

**Periodo de Observación:** enero 1994 - agosto 2010

**Tipo de Modelo:** multiplicativo

**Longitud estacional:** 12

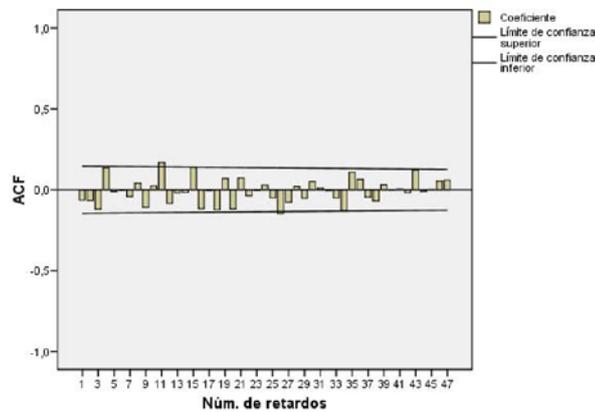
**Tendencia:** Determinística ascendente

El modelo propuesto es **(2,1,0)(0,1,1)**

**Cuadro N° 9**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE ACEITE VEGETAL, 1994-2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**

Parámetros del modelo		
Nombre de la serie	Parte Regular	Parte Estacional
Volumen de ventas de aceite Vegetal	$\Phi_1 = -0,618$ $\Phi_2 = -0,377$	$\Theta_1 = 0,885$

**Gráfico N° 9**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE ACEITE VEGETAL, 1994-2009**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**MEDIDA DE VERIFICACIÓN**

Test de Box & Pierce

$H_0$ : Los errores son incorrelacionados

$H_1$ : Los errores no son incorrelacionados

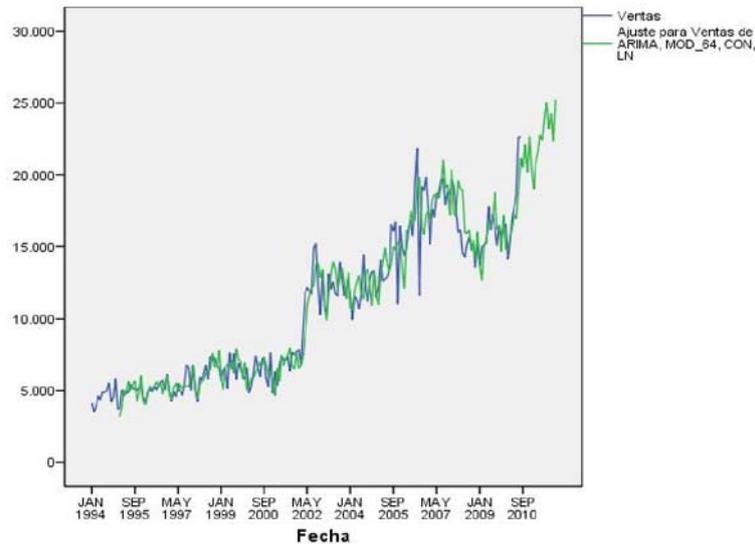
Nivel de significación:  $\alpha=0.05$

QBox & Pierce= 53.53 < Ji-Cuadrado con 195 g.l.=228.58

No se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%.

**Conclusión:** Los residuos son incorrelacionados.

**Gráfico N° 10**  
**PERÚ: VOLUMEN DE VENTA DE ACEITE VEGETAL, ORIGINAL VS. ESTIMADA, 1994-2009**  
**Y PRONÓSTICADA, 2010**  
**(Miles de toneladas métricas)**



**Cuadro N° 10**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE VENTA DE ACEITE VEGETAL,**  
**2010-2011**  
**(Miles de toneladas métricas)**

	PRONÓSTICOS											
	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010	14821	14802	15724	16425	17193	16960	18840	21183	20518	22098	20166	22649
2011	20296	18974	20948	21533	22752	22398	23940	25046	23176	24244	22345	25223

**ANEXO 5: VOL. PRODUCCIÓN ELÉCTRICA**

**CARACTERÍSTICAS**

**Periodo de Observación:** Enero 1990 - Diciembre 2009

**Tipo de Modelo:** SARIMA no estacionario

**Longitud estacional:** Del gráfico podemos notar una frecuencia de 0.08, la cual al hacer la división  $1/0.08$  obtenemos 12.5, se podría decir que corresponde al periodo de un año.

**Modelo Propuesto:**

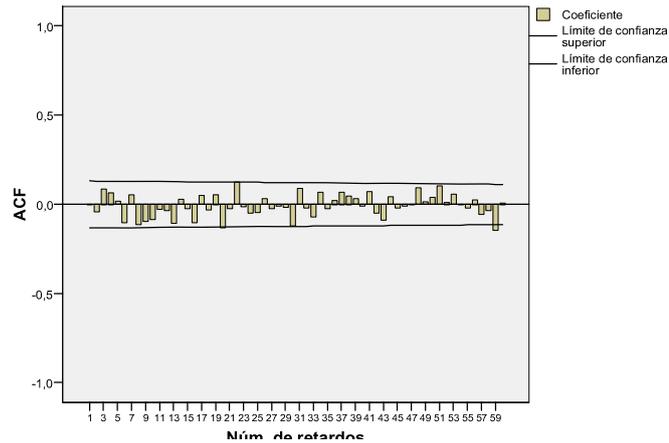
**Cuadro N° 11**  
**PERÚ: COEFICIENTES ESTIMADOS DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, 1990-2009**  
**(Giga wattios - hora)**  
**SARIMA (1,1,0) (0,1,1)<sub>12</sub>**

Parámetros del modelo		
Nombre de la serie	Parte Regular	Parte Estacional
Producción eléctrica de Servicios Públicos	$\Phi_1 = -0.10$	$\Phi_{12} = 0.688$

**GRÁFICA DE AUTOCORRELACIONES RESIDUALES**

De este gráfico verificamos que se encuentran dentro de la banda de confianza.

**Gráfico N° 11**  
**PERÚ: AUTOCORRELACIONES DE LOS RESIDUOS DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, 1990-2009**  
**(Giga wattios - hora)**

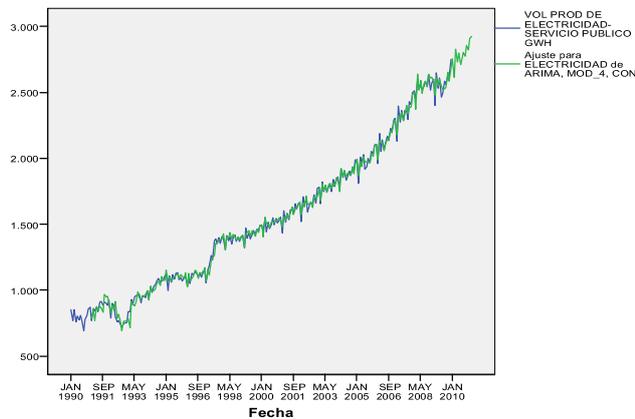


**MEDIDA DE VERIFICACIÓN**

Test de Box & Pierce y el test de Box & Ljung  
 $H_0$ : Los errores son incorrelacionados  
 $H_1$ : Los errores no son incorrelacionados  
 Nivel de significación:  $\alpha=0.05$   
 QBox & Pierce= 58.48314271 < Ji-Cuadrado con 57 g.l.=75.6237

QBox & Ljung=67.21287623 < Ji-Cuadrado con 57 g.l.=75.6237  
 No se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación del 5%.  
 Conclusión: Los residuos son incorrelacionados.

**Gráfico N° 12**  
**PERÚ: VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, ORIGINAL VS. ESTIMADA, 1990-2009 Y PRONÓSTICADA, 2010**  
**(Giga wattios - hora)**



Notamos que se ajusta a la serie.

**Cuadro N° 12**  
**PERÚ: PRONÓSTICOS DEL VOLUMEN DE PRODUCCIÓN ELÉCTRICA, 2010-2011**  
**(Giga wattios - hora)**

	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC
2010	2758,8	2617,4	2828,8	2733,4	2800,9	2715,0	2755,3	2806,1	2773,5	2859,4	2822,7	2911,0
2011	2926,3	2784,3	2996,5	2901,7	2969,8	2884,5	2925,3	2976,8	2944,8	3031,3	2995,2	3084,0

**BASES DE DATOS**

	IPC - ÍNDICE GENERAL (BASE 2009) ENERO 1990 - OCTUBRE 2010						
	1990 - 1992	1993 - 1995	1996 - 1998	1999 - 2001	2002 - 2004	2005 - 2007	2008 - 2010
Enero	0,15	35,52	60,85	75,87	81,10	87,86	93,84
Febrero	0,20	36,57	61,78	76,11	81,07	87,65	94,69
Marzo	0,26	38,11	62,64	76,58	81,51	88,22	95,68
Abril	0,36	39,80	63,18	77,03	82,10	88,33	95,83
Mayo	0,48	41,01	63,64	77,39	82,21	88,44	96,18
Junio	0,68	41,75	63,94	77,53	82,03	88,67	96,92
Julio	1,11	42,90	64,82	77,74	82,06	88,76	97,46
Agosto	5,53	43,98	65,42	77,87	82,14	88,60	98,03
Septiembre	6,29	44,70	65,63	78,23	82,53	88,52	98,59
Octubre	6,89	45,37	66,11	78,13	83,12	88,65	99,20
Noviembre	7,30	46,10	66,42	78,35	82,79	88,71	99,50
Diciembre	9,04	47,26	67,22	78,69	82,76	89,08	99,86
Enero	10,65	48,13	67,54	78,75	82,95	89,53	99,97
Febrero	11,65	49,00	67,60	79,12	83,34	90,02	99,89
Marzo	12,55	50,14	68,47	79,55	84,27	90,43	100,25
Abril	13,28	50,92	68,73	79,96	84,23	90,89	100,27
Mayo	14,29	51,28	69,25	79,97	84,20	90,41	100,23
Junio	15,62	51,86	70,00	80,02	83,81	90,29	99,89
Julio	17,03	52,33	70,58	80,44	83,68	90,14	100,07
Agosto	18,27	53,13	70,74	80,81	83,69	90,26	99,87
Septiembre	19,28	53,40	70,95	81,26	84,16	90,29	99,78
Octubre	20,04	53,56	71,06	81,45	84,20	90,33	99,90
Noviembre	20,84	54,21	71,11	81,50	84,34	90,07	99,79
Diciembre	21,62	54,53	71,57	81,63	84,82	90,09	100,10
Enero	22,38	54,73	72,21	81,78	85,27	90,10	100,40
Febrero	23,44	55,35	73,11	81,98	86,20	90,34	100,73
Marzo	25,19	56,11	74,07	82,40	86,60	90,65	101,01
Abril	25,99	56,66	74,52	82,06	86,58	90,81	101,03
Mayo	26,88	57,14	74,96	82,08	86,88	91,26	101,27
Junio	27,85	57,60	75,36	82,03	87,37	91,69	101,53
Julio	28,81	57,93	75,84	82,17	87,54	92,12	101,90
Agosto	29,63	58,53	76,04	81,92	87,53	92,25	102,17
Septiembre	30,40	58,76	75,63	81,97	87,55	92,82	102,14
Octubre	31,51	59,06	75,37	82,00	87,53	93,11	101,99
Noviembre	32,63	59,79	75,40	81,60	87,78	93,21	
Diciembre	33,88	60,10	75,86	81,53	87,77	93,63	

Fuente: INEI

	PBI - TOTAL ECONÓMICO (BASE 1994) ENERO 1991 - SETIEMBRE 2010						
	1991 - 1993	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	80,95	93,60	114,93	116,31	128,71	149,23	188,09
Febrero	82,41	93,18	111,37	116,87	124,41	149,67	183,19
Marzo	82,05	99,65	111,31	128,89	131,48	161,13	190,84
Abril	84,59	99,72	124,70	122,95	142,76	164,26	198,22
Mayo	91,22	105,94	129,39	137,24	148,16	174,31	208,72
Junio	89,83	103,60	123,83	131,72	142,60	167,04	198,10
Julio	94,95	99,50	120,61	126,41	138,06	164,10	197,11
Agosto	82,27	99,09	116,38	119,65	129,31	161,62	190,90
Septiembre	80,65	97,60	116,33	113,31	128,49	156,60	191,99
Octubre	86,39	99,21	119,13	119,25	132,86	162,76	198,66
Noviembre	81,27	101,86	115,15	119,36	130,15	165,98	197,92
Diciembre	83,06	107,06	124,71	121,68	136,49	172,78	206,95
Enero	86,54	104,75	113,35	115,57	133,04	163,86	195,18
Febrero	86,48	102,84	114,85	113,50	129,86	162,45	193,73
Marzo	86,81	107,44	118,03	120,27	139,01	173,54	208,00
Abril	82,92	107,92	123,02	126,67	149,02	176,73	216,93
Mayo	87,81	120,25	123,75	136,11	154,09	192,35	227,62
Junio	87,91	112,76	122,64	127,70	145,95	179,83	222,07
Julio	83,49	112,19	120,49	127,78	142,37	179,94	215,37
Agosto	79,06	109,47	117,39	121,85	135,93	173,19	208,70
Septiembre	78,31	103,25	115,44	115,93	134,90	171,63	211,97
Octubre	84,18	105,76	114,48	124,20	138,30	180,45	
Noviembre	82,94	106,46	114,81	121,44	142,90	180,52	
Diciembre	88,78	110,21	120,22	125,80	148,43	187,87	
Enero	81,57	105,99	111,71	121,74	140,75	182,31	
Febrero	86,67	105,72	111,96	116,86	141,23	182,61	
Marzo	90,15	108,26	116,75	123,23	144,74	185,86	
Abril	87,35	111,33	118,46	137,43	156,38	201,52	
Mayo	90,94	122,06	127,94	144,08	164,84	207,72	
Junio	95,48	115,91	125,04	132,93	156,56	202,90	
Julio	90,39	116,15	121,38	132,96	152,28	198,90	
Agosto	89,32	109,73	114,24	125,87	146,12	191,19	
Septiembre	87,03	105,19	115,80	124,82	143,86	191,85	
Octubre	86,52	108,94	119,52	128,55	148,24	196,02	
Noviembre	86,97	110,01	121,21	128,71	155,14	191,32	
Diciembre	91,25	116,84	127,42	133,77	159,28	197,33	

Fuente: INEI

	PBI - MANUFACTURA (BASE 1994) ENERO 1991 - SETIEMBRE 2010						
	1991 - 1993	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	85,63	92,08	110,96	108,81	122,19	146,62	183,24
Febrero	80,11	85,54	101,45	108,35	117,17	142,07	166,94
Marzo	78,82	98,48	103,69	122,54	124,04	156,28	174,13
Abril	78,92	98,57	119,52	108,78	128,02	146,32	168,07
Mayo	84,96	100,71	119,30	122,80	132,69	161,97	179,70
Junio	88,92	104,32	114,83	119,09	130,08	160,85	173,50
Julio	98,83	99,80	111,33	114,94	124,01	152,61	169,16
Agosto	84,26	99,29	109,81	112,94	123,75	159,43	167,81
Septiembre	84,07	100,08	112,80	107,01	125,01	153,81	174,55
Octubre	93,93	103,57	117,60	114,61	129,02	160,66	181,58
Noviembre	86,63	108,85	114,10	118,74	128,77	167,26	183,07
Diciembre	83,85	108,72	117,75	113,07	126,27	167,12	187,18
Enero	84,34	106,72	108,36	110,70	127,47	165,62	184,50
Febrero	79,44	98,36	103,67	105,73	120,95	154,94	178,56
Marzo	84,12	105,64	109,13	118,14	134,19	169,37	201,28
Abril	76,53	103,96	106,65	113,96	134,91	161,37	195,03
Mayo	84,41	112,99	111,04	127,23	141,34	184,18	205,21
Junio	88,91	108,12	112,49	118,54	137,87	178,47	211,88
Julio	80,39	106,48	111,40	114,41	136,40	172,73	199,30
Agosto	76,80	106,43	111,13	113,42	130,01	172,25	200,45
Septiembre	76,08	100,31	109,36	110,39	132,48	169,82	203,67
Octubre	85,58	105,71	109,03	120,79	139,25	184,46	
Noviembre	87,58	106,80	109,39	115,45	146,51	188,82	
Diciembre	90,91	104,62	104,29	111,79	141,67	181,02	
Enero	79,77	104,25	101,91	116,35	139,29	184,21	
Febrero	77,85	100,44	97,05	108,17	134,89	178,92	
Marzo	88,35	100,99	105,00	115,26	139,64	184,17	
Abril	82,96	104,02	104,65	125,62	145,04	194,49	
Mayo	83,02	112,29	109,56	130,62	155,80	195,41	
Junio	93,78	107,85	110,20	123,68	150,72	199,68	
Julio	85,29	109,37	104,84	122,33	144,80	192,76	
Agosto	87,13	106,81	103,12	119,46	143,64	187,36	
Septiembre	86,13	104,88	107,52	119,89	139,45	190,41	
Octubre	87,19	106,18	114,14	124,85	143,82	192,97	
Noviembre	87,53	112,86	117,86	125,66	159,51	188,00	
Diciembre	89,78	114,91	120,33	127,06	147,40	184,20	

Fuente: INEI

	PBI - COMERCIO (BASE 1994) ENERO 1991 - SETIEMBRE 2010						
	1991 - 1993	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	75,95	88,88	119,34	113,44	125,82	145,67	194,48
Febrero	73,84	87,12	109,62	113,43	119,31	146,05	184,04
Marzo	80,87	98,38	116,20	123,92	129,35	167,49	194,26
Abril	89,59	104,67	136,88	131,95	145,56	180,31	214,97
Mayo	98,96	114,96	143,34	149,89	156,35	187,71	219,36
Junio	93,37	106,11	132,20	135,59	143,16	171,08	209,47
Julio	96,39	99,20	118,93	120,53	128,28	159,18	197,28
Agosto	79,84	100,95	115,69	112,62	117,46	153,98	189,83
Septiembre	78,33	96,03	115,65	104,80	115,84	145,97	195,49
Octubre	87,77	96,73	114,76	112,38	120,00	157,23	202,46
Noviembre	79,33	101,12	110,57	113,69	117,47	163,11	197,20
Diciembre	80,50	105,84	116,42	112,30	122,98	164,41	193,57
Enero	83,56	107,62	113,54	114,39	126,95	167,53	205,43
Febrero	82,33	103,26	112,52	116,12	123,11	164,19	199,09
Marzo	85,98	115,58	123,63	122,08	135,61	180,01	214,85
Abril	84,71	114,97	139,45	132,42	151,78	193,12	238,82
Mayo	92,20	134,53	136,19	150,11	164,92	203,36	243,68
Junio	90,77	119,79	125,93	131,44	148,04	177,36	231,97
Julio	81,40	112,26	112,01	124,09	133,67	179,91	214,75
Agosto	76,39	110,61	108,80	115,29	126,04	167,41	206,85
Septiembre	76,15	102,45	107,18	108,11	125,02	164,84	216,92
Octubre	83,65	103,18	105,90	114,82	127,27	176,76	
Noviembre	81,80	104,82	108,73	114,83	136,99	177,23	
Diciembre	86,88	103,58	111,04	113,60	138,40	178,46	
Enero	71,24	108,37	107,21	117,01	136,95	191,27	
Febrero	78,95	101,44	105,18	115,07	134,66	185,61	
Marzo	86,05	113,02	116,70	120,88	141,74	193,65	
Abril	86,98	120,32	123,95	144,31	165,98	220,01	
Mayo	95,22	134,59	140,12	160,08	174,56	220,96	
Junio	98,41	122,13	127,66	131,98	154,89	216,86	
Julio	88,21	110,92	114,14	126,45	139,03	202,99	
Agosto	86,94	106,45	106,79	116,16	134,41	193,12	
Septiembre	85,56	101,28	109,90	115,20	130,80	196,97	
Octubre	84,01	108,19	109,66	117,49	136,15	202,91	
Noviembre	85,78	107,74	114,21	119,14	144,22	192,08	
Diciembre	88,21	110,19	115,08	121,10	146,10	185,67	

Fuente: INEI

	PBI - TOTAL INDUSTRIAS - VAB (BASE 1994) ENERO 1991 - SETIEMBRE 2010						
	1991 - 1993	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	81,66	93,50	114,10	116,19	128,72	148,91	188,33
Febrero	83,55	93,61	111,50	117,03	124,63	150,06	183,67
Marzo	82,95	99,73	111,17	129,32	131,29	160,69	191,28
Abril	86,02	100,14	124,81	123,78	144,09	165,80	200,12
Mayo	92,26	106,59	129,95	137,80	149,65	175,26	210,56
Junio	90,51	104,29	124,03	132,61	143,62	167,90	200,44
Julio	94,81	100,08	120,53	127,05	138,76	164,80	198,46
Agosto	82,55	98,58	115,34	119,26	129,22	161,24	191,37
Septiembre	80,64	96,98	115,37	113,03	128,31	155,99	191,51
Octubre	85,92	98,63	117,65	118,71	132,22	161,76	197,50
Noviembre	81,12	101,17	113,84	118,94	129,81	165,13	197,35
Diciembre	83,03	106,69	123,88	121,38	135,81	171,98	206,50
Enero	86,47	104,51	112,53	115,14	133,24	163,80	195,91
Febrero	87,02	102,72	114,56	113,73	130,35	162,68	194,21
Marzo	87,01	106,59	117,06	120,09	139,05	173,71	207,23
Abril	83,58	107,84	122,73	127,74	150,16	178,46	218,69
Mayo	88,43	120,48	123,53	136,98	155,12	193,41	229,33
Junio	88,63	112,69	122,18	128,71	146,67	181,08	224,08
Julio	83,76	111,74	119,82	128,77	142,57	180,73	216,19
Agosto	78,92	108,46	116,38	121,63	135,37	173,40	208,31
Septiembre	77,96	102,65	114,50	116,00	134,33	171,64	210,69
Octubre	83,68	104,79	113,90	123,91	137,37	179,72	
Noviembre	82,66	105,39	114,05	120,96	142,41	180,77	
Diciembre	88,89	109,59	120,15	125,76	147,43	188,22	
Enero	81,99	105,37	111,57	121,67	140,51	182,47	
Febrero	87,14	105,67	112,64	117,26	141,33	182,68	
Marzo	90,34	107,95	116,55	123,94	144,19	186,34	
Abril	87,92	111,59	119,37	138,73	156,65	202,91	
Mayo	91,68	122,31	128,97	145,73	165,26	208,86	
Junio	96,04	116,39	126,09	134,13	157,17	204,40	
Julio	90,84	116,08	121,82	133,42	152,46	199,25	
Agosto	89,08	109,15	113,94	125,57	145,32	191,09	
Septiembre	86,49	104,53	115,19	124,55	143,21	191,02	
Octubre	86,35	107,96	118,95	128,16	147,49	194,69	
Noviembre	86,86	109,46	120,70	128,54	154,34	190,59	
Diciembre	91,42	116,60	127,18	133,68	158,81	196,56	

Fuente: INEI

	VOLUMEN DE VENTA DE HARINA DE TRIGO - TM (Miles) ENERO 1994 - AGOSTO 2010					
	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	63845	53753	74451	73551	74215	84769
Febrero	57231	52587	71521	75345	77716	80142
Marzo	69490	62394	71746	75154	90880	87420
Abril	66133	76453	70201	76027	88236	86020
Mayo	65713	73350	78684	86252	94204	91488
Junio	64938	69995	79167	82921	95120	90948
Julio	68017	65327	77946	85681	91249	96956
Agosto	77603	72110	85338	91984	103085	87930
Septiembre	72925	71164	77443	90030	95155	99895
Octubre	67946	68712	82615	83472	100737	96475
Noviembre	70904	62723	71737	80742	100361	90619
Diciembre	63188	62148	68847	80298	79494	79224
Enero	61090	60230	77714	69581	80155	81869
Febrero	62418	64084	72751	70721	75864	80238
Marzo	115661	61285	75738	80259	87454	89742
Abril	62124	68249	79863	78034	75440	85739
Mayo	74205	76435	90021	78257	88935	88089
Junio	73354	82037	84177	75744	97568	88961
Julio	81575	92279	87816	86303	93680	89138
Agosto	59448	84965	95010	95423	97304	109146
Septiembre	55863	71039	83835	93155	98038	
Octubre	67190	69829	88856	87313	93365	
Noviembre	65056	67162	83018	87269	86777	
Diciembre	52700	57976	77730	83464	69429	
Enero	63943	73300	79631	77979	74766	
Febrero	57375	70399	72048	72143	81607	
Marzo	62563	76966	76974	83296	77871	
Abril	66785	71604	84758	86169	90454	
Mayo	75412	78177	83061	89714	85998	
Junio	69669	74364	87577	88746	90397	
Julio	71190	78099	93798	86873	91520	
Agosto	75183	80249	96321	93193	88118	
Septiembre	67973	76627	100804	92109	85600	
Octubre	75629	75273	65152	89044	98402	
Noviembre	64473	76442	75341	92326	90696	
Diciembre	68295	72217	71392	75560	82838	

Fuente: INEI

	VOLUMEN DE VENTA DE ALIM. BAL. AVES CARNE - TM (Miles) ENERO 1994 - AGOSTO 2010					
	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	40634	58804	84894	100188	99083	139562
Febrero	41615	56489	84254	94557	92786	126937
Marzo	45236	57876	87356	102779	105764	133234
Abril	45605	61825	88552	114232	103600	141132
Mayo	48914	61423	93463	110557	106079	135752
Junio	48984	56838	90436	109077	114420	140066
Julio	48639	62407	92813	109707	110270	148841
Agosto	50236	67534	20283	107241	116470	140472
Septiembre	52329	64779	91199	101089	111203	145311
Octubre	50850	71933	93982	107807	115930	147034
Noviembre	54817	66313	93996	93706	120696	142763
Diciembre	59617	73090	96290	103105	120998	142655
Enero	62580	61726	85512	105521	115618	140201
Febrero	49659	59108	81931	97342	109759	131174
Marzo	55198	57328	90365	106159	114764	139421
Abril	50725	58913	89092	107773	124627	145768
Mayo	56018	59912	93570	103807	127765	141690
Junio	57057	67439	92417	102128	119101	140207
Julio	60027	69104	95556	107766	123997	152639
Agosto	62415	73022	97454	102750	129665	151286
Septiembre	59178	70925	94093	105852	121098	
Octubre	60567	77086	99388	107186	129627	
Noviembre	58840	75260	95462	108238	131436	
Diciembre	61226	85546	101404	115842	132297	
Enero	61596	80164	97446	103906	132157	
Febrero	50735	78946	90069	95594	126355	
Marzo	48298	83654	93522	101121	125146	
Abril	59309	91812	99855	99480	132264	
Mayo	64256	88510	105521	103417	134463	
Junio	59841	77798	97562	104463	131877	
Julio	56913	78662	103316	104256	139086	
Agosto	59631	81171	105275	110161	135034	
Septiembre	58115	83461	99900	111639	137527	
Octubre	55094	84761	91065	107134	143967	
Noviembre	54958	85135	104280	106661	135285	
Diciembre	63188	103152	105767	108540	143894	

Fuente: INEI

	VOLUMEN DE VENTA DE LECHE EVAPORADA - TM (Miles) ENERO 1994 - AGOSTO 2010					
	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	8433	10283	14585	17763	22275	23538
Febrero	8742	10164	14000	17965	23520	22981
Marzo	10703	10964	14360	20614	29034	27713
Abril	10660	13854	16338	19719	26282	30053
Mayo	10163	12723	18159	22689	28620	30525
Junio	11001	12167	19845	21808	28065	29897
Julio	11051	11841	17882	22760	27009	32170
Agosto	12804	13068	19511	25042	30456	31753
Septiembre	11956	13677	15564	24041	31570	32113
Octubre	11221	12864	17706	24212	33762	35830
Noviembre	14227	14932	21554	27888	32792	34057
Diciembre	10928	15426	23692	28171	35412	32689
Enero	10372	11305	13716	18497	25104	26789
Febrero	11094	13269	13203	18921	25209	26406
Marzo	13146	14680	17785	23292	30592	31780
Abril	12278	12324	18424	23709	30287	32391
Mayo	13635	13330	16664	25137	31394	34260
Junio	14547	12949	16261	26031	31462	37325
Julio	10624	15098	16420	25000	33597	33524
Agosto	12480	14629	21592	27719	33919	35044
Septiembre	13962	15063	19496	28036	32087	
Octubre	12730	14736	20006	30431	38130	
Noviembre	15367	14368	19265	27036	33176	
Diciembre	13522	12720	20571	34599	36012	
Enero	11833	10854	15432	21023	28646	
Febrero	7900	10841	17124	24008	27844	
Marzo	11548	15899	19837	26141	29037	
Abril	11864	13064	20674	27610	31911	
Mayo	14000	14456	19433	29777	32470	
Junio	13931	14244	19871	26443	31968	
Julio	15158	15226	18536	28395	29095	
Agosto	11723	17282	21615	27597	31265	
Septiembre	13031	15546	21834	28075	31250	
Octubre	15439	17279	22882	27147	35520	
Noviembre	13962	17272	20476	32005	34780	
Diciembre	13320	17021	25555	32979	32654	

Fuente: INEI

	VOLUMEN DE VENTA DE ACEITE VEGETAL - TM (Miles) ENERO 1994 - AGOSTO 2010					
	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	4122	4948	6580	10957	14896	13671
Febrero	3502	4246	4824	10018	14351	14977
Marzo	3851	4923	5300	13097	15081	15057
Abril	4665	4585	6182	12071	16376	15244
Mayo	4349	5509	7437	12560	16810	17791
Junio	4881	4959	6630	11760	15719	16139
Julio	4890	4702	5937	11644	19497	17254
Agosto	4998	5307	7218	13923	21836	16297
Septiembre	5531	6797	7296	12859	11650	15066
Octubre	4189	6604	5843	11639	19158	16461
Noviembre	4548	5036	5262	12082	18891	15662
Diciembre	5821	6782	7654	12859	19848	16163
Enero	3719	4989	4817	11592	17662	16579
Febrero	3740	4220	6331	9940	15142	14097
Marzo	5057	5878	5357	11583	17623	15371
Abril	4672	5760	6797	11333	17046	17048
Mayo	4879	6151	7389	10693	18579	17798
Junio	4871	6794	7149	11723	18768	18625
Julio	5407	5786	7086	14423	19625	22587
Agosto	5165	7364	7375	12172	19698	22667
Septiembre	5077	7053	6324	11194	17888	
Octubre	5036	7251	7638	12720	18803	
Noviembre	5223	6757	7522	13235	18591	
Diciembre	5302	6555	7746	13286	19697	
Enero	4500	5691	7831	11489	19240	
Febrero	4153	6400	6832	12200	17607	
Marzo	4872	6558	9412	14057	16027	
Abril	5100	5130	11830	12563	16132	
Mayo	4939	7623	12144	12732	14536	
Junio	5238	6498	11946	12873	14248	
Julio	5075	7592	11796	13329	15173	
Agosto	5413	5766	14896	16519	15620	
Septiembre	5604	6914	15211	16060	15061	
Octubre	5712	6499	12225	16714	15254	
Noviembre	5054	6000	10265	11034	13548	
Diciembre	6131	5796	13321	16436	15528	

Fuente: INEI

	EXPORTACIÓN DE PRODUCTOS HIDROBIOLÓGICOS - MILES DE TMB - CONSUMO HUMANO DIRECTO. ENERO 1992- AGOSTO 2010						
	1992-1994	1995-1997	1998-2000	2001-2003	2004-2006	2007-2009	2010
Enero	2,1	5,2	10,1	11,9	11,9	27,1	10,0
Febrero	2,3	6,8	7,8	12,0	16,4	36,6	22,6
Marzo	1,8	7,5	9,2	13,4	18,1	46,7	38,1
Abril	1,5	5,0	7,3	10,7	19,4	42,9	32,5
Mayo	1,7	5,3	7,5	14,0	20,3	33,3	30,4
Junio	2,1	5,4	6,6	9,3	21,1	26,5	44,2
Julio	1,6	6,1	5,5	10,2	19,5	25,0	17,3
Agosto	1,7	6,1	5,0	10,3	14,9	25,9	16,7
Septiembre	1,9	6,6	5,6	10,7	11,8	16,2	
Octubre	1,5	5,6	6,7	10,8	14,0	20,3	
Noviembre	2,0	5,1	5,5	9,7	15,1	15,6	
Diciembre	2,0	5,3	6,1	10,0	14,6	23,6	
Enero	1,3	4,6	6,0	8,8	12,7	24,2	
Febrero	1,3	6,1	9,0	11,1	20,8	36,4	
Marzo	1,0	8,8	10,2	9,1	17,3	42,1	
Abril	1,6	8,0	7,0	11,5	17,0	32,9	
Mayo	3,2	6,8	10,6	11,8	20,2	30,3	
Junio	2,2	6,3	6,8	15,5	20,4	40,9	
Julio	2,4	7,8	7,9	11,0	14,6	28,7	
Agosto	2,8	6,9	5,9	7,8	14,9	33,9	
Septiembre	2,6	5,0	8,5	6,9	11,7	33,0	
Octubre	2,9	5,1	8,6	5,3	12,5	29,6	
Noviembre	3,2	7,0	7,4	6,5	13,4	24,4	
Diciembre	4,3	6,6	9,2	10,5	17,4	19,4	
Enero	3,3	13,6	7,8	10,4	21,6	21,8	
Febrero	3,6	13,4	9,6	11,8	22,6	32,3	
Marzo	4,7	17,3	10,0	14,7	28,8	38,0	
Abril	3,9	15,5	6,7	15,4	31,5	30,5	
Mayo	4,2	13,5	6,3	12,7	32,4	33,6	
Junio	4,1	13,5	6,2	13,3	31,2	42,5	
Julio	5,7	12,8	9,8	13,9	31,2	38,2	
Agosto	4,9	10,7	10,7	9,8	29,7	29,3	
Septiembre	7,7	11,3	10,0	10,7	27,3	30,8	
Octubre	4,8	12,5	9,7	12,1	22,2	20,1	
Noviembre	4,3	11,8	8,6	11,4	23,0	17,7	
Diciembre	4,1	10,1	10,0	16,9	28,0	17,0	

Fuente: INEI

	EXPORTACION DE PRODUCTOS HIDROBIOLÓGICOS - MILES DE TMB - HARINA DE PESCADO. ENERO 1992- AGOSTO 2010						
	1992-1994	1995-1997	1998-2000	2001-2003	2004-2006	2007-2009	2010
Enero	124,6	156,7	61,9	169,2	108,8	107,9	106,0
Febrero	141,0	266,7	9,7	130,3	72,4	150,0	130,2
Marzo	77,9	216,6	24,3	101,1	115,8	120,6	115,9
Abril	80,5	89,2	7,8	176,1	92,0	73,4	52,2
Mayo	114,1	142,2	19,5	244,2	132,0	93,4	18,3
Junio	87,7	270,2	67,2	355,8	138,9	88,3	109,0
Julio	56,6	182,7	60,4	291,3	276,0	119,8	193,0
Agosto	73,3	115,6	94,4	189,4	268,7	140,3	119,5
Septiembre	31,7	71,6	58,9	67,4	182,4	131,2	
Octubre	102,4	18,5	36,5	45,0	119,8	70,6	
Noviembre	86,6	76,5	60,6	93,8	93,8	58,4	
Diciembre	112,0	171,9	168,4	79,4	152,8	110,0	
Enero	87,6	98,5	112,6	57,0	222,1	151,3	
Febrero	88,3	151,6	78,2	86,9	74,7	145,2	
Marzo	123,2	185,7	83,7	39,2	174,2	145,5	
Abril	122,2	76,1	137,7	71,0	95,5	119,9	
Mayo	186,8	107,1	165,2	212,6	219,0	149,1	
Junio	172,8	197,1	185,4	283,7	319,7	152,7	
Julio	136,7	168,7	172,8	229,7	323,8	205,6	
Agosto	133,5	130,9	145,7	222,4	222,3	172,5	
Septiembre	96,9	114,6	66,4	141,9	83,3	97,7	
Octubre	173,3	87,4	20,8	24,7	19,7	71,7	
Noviembre	171,1	56,0	135,2	24,8	19,5	63,9	
Diciembre	196,7	192,8	177,4	121,5	227,7	89,8	
Enero	139,7	208,8	186,3	133,3	182,8	115,0	
Febrero	234,6	204,0	157,9	130,4	143,9	145,0	
Marzo	187,1	206,1	139,7	118,7	127,7	168,5	
Abril	211,1	123,8	182,5	55,1	29,8	65,3	
Mayo	262,8	211,0	216,0	126,5	155,0	157,9	
Junio	216,5	272,2	271,4	219,1	162,5	254,4	
Julio	231,5	192,4	326,4	190,7	213,3	257,9	
Agosto	219,7	152,6	264,7	95,0	64,0	130,9	
Septiembre	138,6	91,0	146,7	63,1	84,1	49,9	
Octubre	67,9	59,8	178,0	55,5	36,3	31,1	
Noviembre	124,3	79,1	87,6	57,9	48,7	31,1	
Diciembre	219,3	123,6	194,9	127,4	94,4	140,3	

Fuente: INEI

	VOLUMEN DE PROD. DE ELECTRICIDAD, EN GWH. ENERO 1990 - SETIEMBRE 2010						
	1990 - 1992	1993 - 1995	1996 - 1998	1999 - 2001	2002 - 2004	2005 - 2007	2008 - 2010
Enero	854	839	1106	1411	1655	1965	2515
Febrero	769	842	1031	1325	1522	1812	2443
Marzo	852	932	1106	1474	1709	2009	2602
Abril	762	894	1053	1395	1662	1968	2522
Mayo	805	953	1131	1436	1683	2032	2559
Junio	775	960	1118	1392	1593	1921	2523
Julio	809	960	1141	1423	1649	1939	2548
Agosto	771	977	1133	1453	1663	2003	2586
Septiembre	695	909	1108	1427	1665	1972	2547
Octubre	783	955	1131	1464	1727	2055	2635
Noviembre	811	957	1103	1459	1664	2034	2521
Diciembre	860	945	1146	1494	1776	2102	2572
Enero	873	994	1145	1488	1783	2110	2604
Febrero	771	941	1056	1449	1655	1964	2403
Marzo	862	1026	1160	1544	1821	2188	2648
Abril	846	983	1190	1444	1748	2053	2533
Mayo	874	1032	1263	1516	1798	2140	2610
Junio	842	1041	1234	1468	1746	2069	2467
Julio	914	1076	1375	1502	1792	2117	2496
Agosto	918	1093	1392	1553	1798	2170	2586
Septiembre	889	1062	1360	1497	1751	2138	2565
Octubre	913	1071	1402	1545	1841	2229	2632
Noviembre	900	1075	1360	1510	1791	2206	2627
Diciembre	886	1109	1412	1533	1838	2293	2751
Enero	926	1127	1389	1557	1860	2305	2757
Febrero	791	1000	1308	1435	1774	2133	2563
Marzo	901	1109	1417	1606	1924	2396	2873
Abril	887	1061	1377	1519	1858	2277	2748
Mayo	799	1119	1406	1585	1909	2366	2814
Junio	762	1084	1355	1538	1835	2292	2758
Julio	774	1128	1395	1609	1862	2366	2786
Agosto	742	1133	1421	1614	1904	2361	2808
Septiembre	718	1080	1372	1579	1873	2299	2754
Octubre	754	1095	1408	1656	1925	2431	
Noviembre	752	1071	1370	1619	1905	2409	
Diciembre	755	1098	1412	1665	1991	2498	

Fuente: INEI

	VOLUMEN DE PROD. DE AGUA, EN M3. ENERO 1990 - SETIEMBRE 2010						
	1990 - 1992	1993 - 1995	1996 - 1998	1999 - 2001	2002 - 2004	2005 - 2007	2008 - 2010
Enero	55061	64374	76717	72789	73757	76050	75320
Febrero	48185	63666	73113	68887	67497	70474	71872
Marzo	53372	71501	78092	76719	76791	77419	77010
Abril	44621	69773	74863	73140	72605	74407	73767
Mayo	42036	71997	73759	74228	72293	73073	72139
Junio	38477	64940	71381	69868	67692	69128	67591
Julio	40140	63966	70741	69726	67846	70127	71143
Agosto	40993	63675	71014	69509	68874	70542	69713
Septiembre	40039	60422	68380	68782	67332	67198	69153
Octubre	42589	63616	66028	70893	69980	70694	71793
Noviembre	48299	70566	61540	67570	69259	69719	71101
Diciembre	50918	75378	64722	72479	73942	74584	74927
Enero	51839	75833	72277	73637	75507	76546	77455
Febrero	50964	67428	69490	71216	70298	70521	70715
Marzo	53877	76945	78196	76986	78731	77989	78106
Abril	55399	75851	63323	73422	74714	72853	74685
Mayo	56930	77526	64588	73911	74462	73309	74876
Junio	51480	74392	63600	68018	69245	68166	69774
Julio	52126	73649	66896	68987	69642	69644	70872
Agosto	53417	75298	66391	69495	68429	69813	71762
Septiembre	51080	73158	62162	67975	65869	68274	70426
Octubre	51451	74512	64991	70979	70496	71601	73510
Noviembre	49421	71848	68227	70612	69291	70880	72533
Diciembre	53187	73695	74651	73114	73481	74766	75642
Enero	55173	75694	74361	74831	72974	77145	77011
Febrero	41982	67779	66623	70193	71272	71362	71919
Marzo	57439	78529	75887	78218	76698	78642	80420
Abril	52443	74581	76110	71843	72432	74564	76516
Mayo	42994	69176	75627	72637	68778	74087	75807
Junio	38499	64442	71000	66573	64285	68911	71772
Julio	39929	67208	70976	68731	64456	68574	72125
Agosto	40979	72981	70740	69199	63903	67207	72978
Septiembre	38031	68247	68504	65870	62832	66044	71621
Octubre	39432	64431	72277	68547	65809	70029	
Noviembre	39009	63848	71885	67360	64706	68976	
Diciembre	41071	65933	74031	71875	72514	72650	

Fuente: INEI

	ÍNDICE GLOBAL MENSUAL DE LA PRODUCCION NACIONAL: ENERO 1990 - SETIEMBRE 2010 (BASE = 1994)						
	1990 - 1992	1993 - 1995	1996 - 1998	1999 - 2001	2002 - 2004	2005 - 2007	2008 - 2010
Enero	74,29	78,73	109,10	115,38	127,57	147,54	194,79
Febrero	72,45	83,42	108,55	115,86	122,37	148,26	195,23
Marzo	76,53	86,69	111,22	120,58	129,03	151,85	198,60
Abril	70,22	83,87	114,11	121,93	143,34	163,43	214,63
Mayo	77,04	87,37	124,89	131,44	150,05	172,07	221,29
Junio	78,66	91,35	118,22	128,18	138,25	163,41	215,64
Julio	71,96	87,41	118,87	124,83	138,90	159,51	212,72
Agosto	55,86	86,69	112,49	117,92	131,54	153,72	204,94
Septiembre	52,68	84,87	108,05	119,86	130,56	151,64	205,83
Octubre	59,91	84,51	111,95	123,62	134,70	156,46	210,19
Noviembre	65,25	85,34	112,98	125,49	134,66	163,50	205,35
Diciembre	68,15	90,23	120,13	132,11	139,72	167,91	211,32
Enero	81,29	92,78	118,41	120,44	134,59	157,82	201,09
Febrero	82,66	92,75	114,81	120,99	130,19	158,62	195,94
Marzo	82,20	99,50	114,72	133,45	137,29	170,60	203,97
Abril	84,27	99,43	128,22	127,14	148,19	173,25	211,04
Mayo	90,94	105,82	132,98	141,49	153,49	183,97	222,41
Junio	89,09	103,71	127,37	135,62	147,50	176,08	210,41
Julio	93,92	100,44	124,48	131,04	143,69	174,23	210,65
Agosto	81,74	100,54	120,35	124,27	134,63	171,95	204,61
Septiembre	79,97	99,32	120,35	117,68	133,85	166,78	206,07
Octubre	85,38	101,04	123,19	124,12	138,46	173,42	213,37
Noviembre	80,02	103,79	119,01	124,26	135,83	176,50	212,86
Diciembre	81,69	109,15	128,96	126,29	142,35	183,59	222,17
Enero	84,76	107,17	117,87	120,33	139,32	174,93	208,66
Febrero	84,27	105,31	119,17	117,95	136,13	173,24	207,22
Marzo	84,17	110,12	122,21	125,01	145,66	185,11	222,32
Abril	80,02	110,12	127,38	131,43	155,51	187,88	230,96
Mayo	84,45	122,32	128,00	141,03	160,44	204,09	242,55
Junio	84,13	114,82	126,38	132,21	152,29	191,22	235,87
Julio	80,23	114,52	124,59	133,19	149,04	192,44	230,16
Agosto	76,34	112,13	121,56	126,77	142,36	185,06	223,69
Septiembre	75,31	106,08	119,55	120,93	141,39	183,47	227,52
Octubre	80,78	108,61	118,51	129,51	145,00	193,05	
Noviembre	79,55	109,31	118,72	126,88	149,90	193,00	
Diciembre	85,18	113,21	124,29	131,22	155,41	200,27	

Fuente: INEI

	ÍNDICE DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL FIJO: ENERO 1994 - AGOSTO 2010 (BASE 1994)					
	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	86,8	140,4	122,2	109,1	147,9	242,8
Febrero	79,4	116,6	113,7	101,5	140,9	217,1
Marzo	94,2	129,4	129,5	105,4	155,3	215,4
Abril	88,2	144,8	105,7	103,7	139,9	226,7
Mayo	85,4	119,5	111,7	105,4	154,2	219,0
Junio	87,5	117,9	107,5	107,7	149,0	215,0
Julio	87,3	124,1	101,6	111,6	145,4	237,0
Agosto	108,0	143,1	113,5	114,9	171,5	230,7
Septiembre	111,1	145,1	107,7	112,8	158,8	238,6
Octubre	116,1	155,2	116,2	117,4	169,9	252,6
Noviembre	125,2	141,7	119,2	113,8	180,0	249,8
Diciembre	130,8	163,9	116,4	114,7	176,5	273,9
Enero	120,3	144,8	101,5	113,4	174,8	241,2
Febrero	104,2	128,4	107,2	110,2	166,6	237,7
Marzo	131,3	148,0	100,1	116,8	177,8	276,4
Abril	113,7	141,8	99,3	116,0	168,2	262,7
Mayo	125,2	120,8	108,3	114,2	199,8	274,8
Junio	115,4	129,1	95,6	116,5	186,0	273,1
Julio	114,7	128,3	106,1	115,6	205,7	281,7
Agosto	133,9	136,0	107,9	123,9	210,9	295,1
Septiembre	117,2	141,1	99,8	119,9	201,8	
Octubre	123,7	132,2	109,5	117,7	217,9	
Noviembre	129,9	135,6	110,5	126,1	206,0	
Diciembre	134,5	130,0	104,9	129,1	217,0	
Enero	113,5	115,7	105,2	122,9	227,1	
Febrero	105,3	108,7	96,1	118,5	214,3	
Marzo	119,2	123,0	91,1	119,9	218,6	
Abril	119,4	117,6	101,3	129,3	241,1	
Mayo	119,6	102,5	101,3	126,2	251,6	
Junio	103,2	109,3	93,6	123,4	266,5	
Julio	115,0	105,3	106,5	128,8	266,8	
Agosto	121,3	115,8	107,2	139,4	268,9	
Septiembre	112,6	135,6	105,9	138,9	282,5	
Octubre	130,7	131,8	112,1	137,9	288,8	
Noviembre	128,1	130,9	112,7	153,7	269,4	
Diciembre	134,5	141,2	111,4	151,3	271,4	

Fuente: INEI

	ÍNDICE DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL FIJO- CONSTRUCCIÓN: ENERO 1994 - AGOSTO 2010 (BASE 1994)					
	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	85,8	127,0	118,3	111,4	143,1	201,6
Febrero	77,8	120,5	115,3	112,0	141,8	192,2
Marzo	92,7	114,1	116,0	113,7	149,2	199,0
Abril	85,6	125,2	98,2	109,7	132,9	199,6
Mayo	87,7	127,9	108,1	108,8	144,7	207,8
Junio	90,8	119,6	104,2	110,1	139,7	195,6
Julio	91,7	125,4	108,4	112,8	140,5	221,4
Agosto	108,4	135,2	119,7	120,8	170,8	226,2
Septiembre	116,8	143,9	115,2	122,9	165,2	234,6
Octubre	120,2	152,1	115,2	128,9	166,9	248,3
Noviembre	119,3	137,8	109,4	121,5	171,0	243,4
Diciembre	123,2	150,0	102,0	124,1	166,6	272,8
Enero	116,2	131,5	100,4	119,2	158,5	221,8
Febrero	104,2	126,8	95,8	118,7	149,3	223,2
Marzo	115,2	131,2	97,0	124,0	164,6	246,7
Abril	107,9	124,9	98,9	114,1	150,1	242,4
Mayo	126,4	117,9	99,2	112,2	182,2	252,1
Junio	113,3	128,3	90,9	116,1	171,4	240,4
Julio	111,4	135,5	98,9	113,8	176,2	248,7
Agosto	127,9	149,5	108,1	126,9	196,2	258,3
Septiembre	120,0	149,2	105,2	129,4	190,9	
Octubre	127,1	136,5	114,0	124,5	199,9	
Noviembre	123,2	129,4	116,7	131,4	193,0	
Diciembre	121,2	129,9	113,4	134,7	204,7	
Enero	109,3	113,6	116,6	125,2	193,0	
Febrero	104,8	108,8	105,9	123,4	184,0	
Marzo	110,4	118,5	101,4	123,7	187,6	
Abril	101,4	109,7	106,5	126,0	202,8	
Mayo	120,7	105,9	103,9	120,9	209,2	
Junio	102,0	110,9	99,9	119,9	198,7	
Julio	110,7	114,0	111,8	125,3	208,6	
Agosto	121,2	121,1	116,2	140,0	215,6	
Septiembre	116,4	128,7	119,0	144,6	227,5	
Octubre	124,7	135,1	121,2	140,5	224,5	
Noviembre	122,9	133,7	124,1	149,3	213,9	
Diciembre	129,4	130,7	118,7	154,0	225,1	

Fuente: INEI

	ÍNDICE DE FORMACIÓN BRUTA DE CAPITAL FIJO - INVERSIÓN EN MAQUINARIA Y EQUIPO: ENERO 1994 - AGOSTO 2010 (BASE 1994)					
	1994 - 1996	1997 - 1999	2000 - 2002	2003 - 2005	2006 - 2008	2009 - 2010
Enero	87,5	159,2	127,7	106,0	154,4	298,9
Febrero	81,2	111,7	111,9	87,2	139,7	250,9
Marzo	95,4	152,0	149,5	94,0	163,7	237,8
Abril	91,3	173,9	116,8	95,4	149,4	263,5
Mayo	83,3	111,1	117,6	100,8	167,1	234,2
Junio	83,0	116,3	112,1	104,4	161,7	241,4
Julio	82,0	123,6	94,1	110,0	152,1	258,1
Agosto	106,6	153,6	105,3	106,9	172,3	236,9
Septiembre	102,7	146,2	97,6	99,1	150,0	244,1
Octubre	109,7	159,8	117,8	101,7	173,9	258,4
Noviembre	133,9	148,4	134,4	103,2	192,3	258,6
Diciembre	143,5	188,0	140,5	101,8	190,1	275,4
Enero	126,2	163,6	103,0	105,4	197,0	267,6
Febrero	104,6	130,9	122,7	98,7	190,0	257,4
Marzo	155,0	172,7	104,3	107,0	195,7	316,8
Abril	122,2	167,0	99,9	118,7	192,9	290,3
Mayo	125,4	126,1	120,7	116,9	223,9	305,7
Junio	118,5	130,6	102,2	116,9	205,9	317,7
Julio	119,8	120,5	115,9	118,1	245,9	326,7
Agosto	141,8	118,1	107,6	119,8	230,9	345,1
Septiembre	113,1	130,0	92,4	106,8	216,6	
Octubre	119,2	126,3	103,3	108,3	242,4	
Noviembre	140,6	145,7	102,0	118,9	223,7	
Diciembre	157,2	132,2	93,3	121,5	233,7	
Enero	119,5	118,7	89,7	119,8	273,6	
Febrero	106,2	108,9	82,7	112,0	255,5	
Marzo	131,9	129,2	76,9	114,8	260,8	
Abril	146,1	129,2	94,2	133,7	293,2	
Mayo	120,0	99,9	97,8	133,4	309,4	
Junio	105,3	107,8	85,1	128,3	358,7	
Julio	121,2	95,5	99,2	133,6	346,2	
Agosto	121,4	108,6	94,9	138,6	341,7	
Septiembre	107,2	144,2	88,1	131,0	357,3	
Octubre	139,3	127,5	99,6	134,4	376,5	
Noviembre	136,7	127,7	97,3	159,7	344,9	
Diciembre	144,5	159,5	101,6	147,7	334,4	

Fuente: INEI

## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

- [1] Blanxart, M. ; Salafranca, L.; Guaridia, J.; Ferrer, R., y Trubany, J.(1992). Análisis Exploratorio de Datos: Nuevas Técnicas Estadísticas. PPU Barcelona.
- [2] Box, G.E., and Jenkins, G.M. (1976). Time series Analysis, Forecasting, and Control. San Francisco: Holden Day.
- [3] Guerrero,V. (2003). Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas. Segunda edición. Thomson Edit. México.
- [4] Hanke, J. y Wichern, D. (2006). Pronósticos en los Negocios. Octava edición. Pearson Educación. México.
- [5] Morettin, P.y Toloí, C. (2006). Análise de Séries Temporais. 2ªedicao. Editora Edgard Blucher
- [6] Nava, A. (2002). Procesamiento de Series de Tiempo. Fondo de Cultura Económica. México.
- [7] Pérez , C. (2006). Econometría de las Series Temporales. Pearson Prentice Hall.
- [8] Pérez, F. (2007). Introducción a las Series de Tiempo. Métodos Paramétricos. Sello editorial Universidad de Medellín.
- [9] Pérez, F. (2008). Modelos Arima - Arch. Algunas Aplicaciones a las Series de Tiempo Financieras. Sello editorial Universidad de Medellín.
- [10] Quezada, N. (2009). Estadísticas con PASW. Empresa Editora MACRO. Lima.Perú.
- [11] Uriel, E. Introducción al Análisis de Series Temporales (2000). Editorial AC. Madrid España.